ИТМ – Дискретна математика

Душан Ђукић

2. Комбинаторика

2.1. Увод

Јасно нам је шта значи „пребројавање”. Формално, пребројавање коначног скупа X би се могло дефинисати као налажење бијекције између X и скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ за неко n, што би потврдило да X има n елемената.

На потребу пребројавања наилазимо када смо суочени са питањем на колико се начина неки задатак може извршити. Принципе попут следећих редовно користимо.

- *Принцип једнакости*: ако постоји бијекција $f : A \to B$, онда је $|A| = |B|$.
- *Принцип збира*: ако се задатак може обавити извршавањем једне од n могућих радњи, при чему се i-та може извршити на m_i начина, то значи да се читав задатак може извршити на $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ начина.
- *Принцип производа*: ако се задатак састоји из n делова, при чему се i-ти део може извршити на m_i начина, то значи да се читав задатак може извршити на $m_1 m_2 \cdots m_n$ начина.
- *Принцип вишезначности*: ако се задатак може извршити на n начина, али се сваки од могућих исхода може добити на k начина, то значи да има n/k могућих исхода.

Постоје и други методи, а наравно, постоје и скупови који се не могу тако елегантно пребројати.

При пребројавању неком од ових метода често наилазимо на факторијеле и биномне коефицијенте. Ово је тренутак да их се подсетимо.

- *Факторијел* броја $n \in \mathbb{N}_0$ је $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. При томе се дефинише $0! = 1$.
- *Биномни коефицијент* је $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, где су $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. При томе је $\binom{n}{k} = 0$ ако је $k < 0$ или $k > n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Пример 2.1. На колико начина се четири човека и два слона могу распоредити у три камиона тако да два слона не буду у истом камиону? (Људи се разликују; слонови и камиони такође.)

Решење. Први слон се може сместити на 3 начина, а други само на 2 (да не буде са првим слоном). Дакле, укупно $3 \cdot 2 = 6$ начина да сместимо слонове.

Затим, сваки човек се може сместити на три начина (тј. у било који од три камиона), па људе можемо да распоредимо на $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ начина.

Укупно имамо $6 \cdot 81 = 486$ начина.

Пример 2.2. Имамо три кугле - црвену, плаву и зелену - и три кутије. У прву кутију може да стане само једна кугла, у другу две, а у трећу три. На колико начина можемо да распоредимо кугле у кутије?

Решење. Разликујемо два случаја.

(i) <u>Ниједна кугла није у првој кутији</u>. Дакле, свака од три кугле има две могућности - да иде у другу или у трећу кутију. То нам даје $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ распореда. Од њих, само онај у коме су све три кугле у другој кутији није могућ. Остаје 7 могућности.

(ii) <u>Једна кугла је у првој кутији</u>. То може бити било која од три кугле. Од преостале две, свака може да иде било у другу, било у трећу кутију. У овом случају имамо $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ могућности.

Дакле, укупно имамо $7 + 12 = 19$ могућности.

2.2. Пермутације, варијације и комбинације

Дефиниција 2.1. *Пермутација* колекције A од n елемената је распоред свих његових елемената у „реч” $a_1a_2\dots a_n$, тј. у уређену n-торку $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пермутација скупа A одговара бијекцији $\{1, 2, \dots, n\} \to A$. Међутим, ако у колекцији A нису сви елементи различити (а пермутација и тада има смисла), она није скуп у строгом смислу.

Пример 2.3. (а) Скуп $\{1, 2, 3\}$ има 6 пермутација: $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

(б) С друге стране, колекција $\{1, 2, 2\}$ има само 3 пермутације: $122, 212, 221$.

Ако за тренутак замислимо да су две двојке „различите” (означимо их са 2_a и 2_b), онда од елемената $1, 2_a, 2_b$ можемо да направимо 6 пермутација: $12_a2_b, 12_b2_a$, $2_a12_b, 2_b12_a$, $2_a2_b1, 2_b2_a1$. Међутим, овде су само три пермутације $122, 212, 221$ различите, а свака је бројана двапут, јер пермутовање чланова 2_a и 2_b не мења пермутацију.

Одговор на питање колико има пермутација датог скупа или колекције у општем случају даће нам следеће тврђење.

Тврђење 2.1. (а) Број пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ једнак је $n!$.

(б) Број пермутација колекције $\{1,1,...,1, 2,2,...,2, \dots, k,k,...,k\}$, са n_1 јединица, n_2 двојки, итд, n_r бројева r, једнак је $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$, где је $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ укупан број елемената.

Доказ. (а) Први члан у пермутацији може се одабрати на n начина. Затим се други члан може одабрати на $n-1$ начина (један елемент више није доступан), па трећи може на $n-2$ начина, итд. Коначно, последњи елемент има само једну могућност. То је укупно $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1 = n!$ могућности за избор пермутације.

(б) И у овом случају пермутацију можемо направити на $n!$ начина. Међутим, неки начини дају исту пермутацију. Колико има начина који воде истој пермутацији? Њених n_1 јединица могло се одабрати било којим редом, тј. на $n_1!$ начина, затим је њених n_2 двојки могло да се одабере на $n_2!$ начина, итд. Дакле, иста пермутација могла се добити на $n_1!n_2!\cdots n_r!$ начина. Зато број $n!$ морамо да поделимо са $n_1!n_2!\cdots n_r!$

Док пермутација користи све елементе скупа A, *варијација* користи само одређен број њих.

Дефиниција 2.2. Дат је скуп A са n елемената.

Варијација без понављања дужине $k \leqslant n$ је реч састављена од k различитих елемената скупа A.

Варијација са понављањем дужине k је реч састављена од k елемената скупа A, не нужно различитих.

Свака варијација без понављања је истовремено и варијација с понављањем.

Пример 2.4. Реч 325 је варијације без понављања скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, док је реч 322 варијација с понављањем.

Речи које се разликују у поретку, нпр. 322 и 223, сматрају се различитим.

Колико у општем случају скуп $\{1, 2, \dots, n\}$ има варијација без понављања дужине k? Варијација је реч $a_1a_2\dots a_k$ и у њој се „слово” a_1 може одабрати на n начина, затим се слово a_2 може одабрати на $n-1$ начина (један елемент је већ искоришћен), ..., слово a_k се може одабрати на $n-k+1$ начина. То укупно даје $n(n-1)\dots(n-k+1)$ варијација.

С друге стране, ако бројимо варијације с понављањем, свако од слова $a_1, a_2, \dots, a_k$ има по n могућности, па има n^k варијација. Све у свему:

Тврђење 2.2. Дат је n-елементни скуп A.

(а) Број варијација без понављања дужине k је $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

(б) Број варијација са понављањем дужине k је n^k. $\square$

За разлику од варијација, у *комбинацијама* поредак елемената није важан.

Дефиниција 2.3. Дат је скуп A са n елемената.

Комбинација без ӣонављања дужине k је неуређена k-торка $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ различитих елемената скупа A. Другим речима, то је k-елементни подскуп скупа A.

Комбинација са ӣонављањем дужине k је неуређена k-торка $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ елемената скупа A, не нужно различитих.

Понекад је лакше уместо „комбинација/варијација дужине k" писати „k-комбинација или „k-варијација". Свака комбинација без понављања је уједно и комбинација са понављањем.

Пример 2.5. Скуп $\{1,2,3,4\}$ има 4 комбинације без понављања дужине 3: то су $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)$. Ове комбинације тачно одговарају троелементним подскуповима.

Комбинација с понављањем има 20: (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,2,2), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,3), $(1,3,4), (1,4,4), (2,2,2), (2,2,3), (2,2,4), (2,3,3), (2,3,4), (2,4,4), (3,3,3), (3,3,4), (3,4,4), (4,4,4)$.

Сваком k-елементном подскупу скупа A одговара низ нула и јединица дужине n у коме се на i-тој позицији налази јединица ако број i припада подскупу, а 0 ако не припада. У том низу има k јединица и $n-k$ нула. На пример, подскупу $\{2,3,5\}$ скупа $\{1,2,\ldots,6\}$ одговара низ 011010.

Тврђење 2.3. Дат је n-елементни скуп A.

(а) Број комбинација без понављања дужине k је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(б) Број комбинација са понављањем дужине k је $\binom{n+k-1}{k}$.

Доказ. Нека је $A = \{1,2,\ldots,n\}$.

(а) Знамо да варијација дужине k има $\frac{n!}{(n-k)!}$. Свака варијација одређује једну комбинацију. Међутим, пермутовање елемената у варијацији не мења комбинацију. Дакле, свакој комбинацији дужине k одговара $k!$ варијација, па је број комбинација $k!$ пута мањи и једнак је $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

(б) Посматрајмо комбинацију с понављањем $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, при чему је $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Пресликавање

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \mapsto \quad (a_1, a_2{+}1, a_3{+}2, \ldots, a_k{+}k{-}1)$$

даје бијекцију између k-комбинација с понављањем на скупу A и k-комбинација без понављања на скупу $B = \{1,2,\ldots,n{+}k{-}1\}$, а по делу (а) знамо да ових других има тачно $\binom{n+k-1}{k}$. □

2.3. Својства биномних коефицијената

Дефиниција 2.4. Паскалов[1] *ӣроуӣао* је бесконачна троугаона таблица чији се $(n{+}1)$-ви ред одозго састоји од биномних коефицијената $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

Дакле, Паскалов троугао изгледа овако:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 1 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Запажамо да је сваки члан Паскаловог троугла једнак збиру два члана непосредно изнад њега:

Тврђење 2.4. Важи $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ за све $0 < k < n$.

Доказ. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

Овај идентитет има и лак комбинаторни доказ. Наиме, $\binom{n}{k}$ представља број k-елементних подскупова скупа $A = \{1,2,\ldots,n\}$.

- Ако подскуп садржи елемент 1, осталих $k-1$ елемената се може одабрати на $\binom{n-1}{k-1}$ начина;
- Ако подскуп не садржи елемент 1, његових k елемената се може одабрати на $\binom{n-1}{k}$ начина.

Дакле, k-елементних подскупова има укупно $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, па је ово једнако $\binom{n}{k}$.

[1] *Blaise Pascal* (1623-1662), француски математичар

Тврђење 2.5. (а) За $n \geqslant k$ важи $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$;

(б) За $n \geqslant k \geqslant r$ важи $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$;

(в) За $m, n, k \in \mathbb{N}_0$ важи $\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{k-2} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$.

Доказ. (а) Користимо индукцију по n. За $n = k$ тврђење је тривијално, а ако важи за n ($n \geqslant k$), онда важи и за $n+1$ јер је по индуктивној претпоставци

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

(б) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-k)!(k-r)!} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$.

(в) Овај идентитет је најлакше доказати комбинаторно. Имамо m белих и n црних куглица, на колико начина је могуће изабрати укупно k куглица?

Тражени број начина је очигледно $\binom{m+n}{k}$, али одредимо га на други начин. Ако бирамо i белих (и $k-i$ црних) куглица, то можемо учинити на $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ начина. Укупан број начина је $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$, дакле ова сума је једнака $\binom{m+n}{k}$. $\square$

Пример 2.6. Биномна формула нам је позната:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

Проверимо зашто је то тако. У развоју $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$ моном $x^{n-i}y^i$ се појављује онда када из $n-i$ чинилаца одаберемо x, а из осталих i чинилаца одаберемо y, што се може учинити на $\binom{n}{i}$ начина. Дакле, коефицијент уз $x^{n-i}y^i$ је једнак $\binom{n}{i}$ и отуда биномна формула.

Слично, у развоју $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ коефицијент уз моном $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ за $r_1 + \cdots + r_k = n$ биће једнак броју пермутација колекције од r_1 копија x_1, r_2 копија x_2, итд. („пермутације са понављањем"). Тај број је једнак $\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$. Отуда *мултиномна формула*:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1 + \cdots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}.$$

Пример 2.7. Израчунати суму (а) $\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \cdots + \binom{100}{100}$;

(б) $\binom{100}{0} + \frac{1}{2}\binom{100}{1} + \frac{1}{3}\binom{100}{2} + \cdots + \frac{1}{101}\binom{100}{100}$.

Решење. (а) Ова сума је једнака развоју $(1+1)^{100}$ по биномној формули, па је резултат 2^{100}.

(б) Тражена сума је $S = \sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n+1}\binom{100}{n}$. Како је $\frac{1}{n+1}\binom{100}{n} = \frac{100!}{(n+1)n!(100-n)!} = \frac{1}{101} \cdot \frac{101!}{(n+1)!(100-n)!} = \frac{1}{101}\binom{101}{n+1}$, добијамо $S = \frac{1}{101}[\binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \cdots + \binom{101}{101}] = \frac{1}{101}(2^{101} - 1)$.

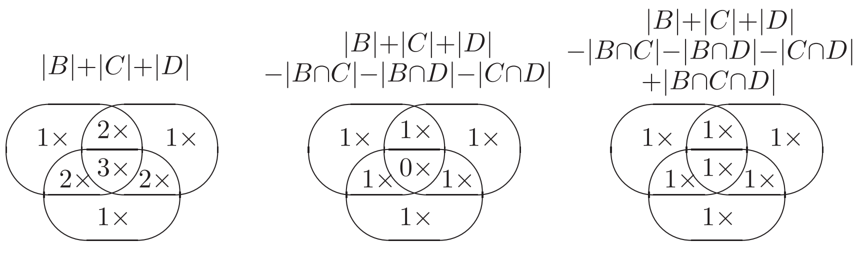
2.4. Принцип укључења и искључења

Размотримо прво следећи пример.

Пример 2.8. Колико има бројева из скупа $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ који нису дељиви ни са 2, ни са 3?

Решење. Треба да искључимо унију скупова $B = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ и $C = \{3, 6, 9 \ldots, 99\}$. Скуп B има 50, скуп C има 33 елемента, а њихов пресек $B \cap C = \{6, 12, 18, \ldots, 96\}$ 16 елемената. Следи да је $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 50 + 33 - 16 = 67$. Према томе, одговор је $100 - 67 = 33$.

Формула $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ коју смо користили може да се уопшти на више скупова. На дијаграмима видимо шта се догађа ако укључимо зато и трећи скуп D у разматрање:



Формалније записано,

$$\begin{aligned}|B\cup C\cup D| &= |B{\cup}C| + |D| - |(B{\cup}C)\cap D| = |B{\cup}C| + |D| - |(B{\cap}D){\cup}(C{\cap}D)|\\ &= |B\cup C| + |D| - |B\cap D| - |C\cap D| + |(B{\cap}D)\cap(C{\cap}D)|\\ &= |B| + |C| + |D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |B\cap C\cap D|.\end{aligned}$$

За више скупова једноставном индукцијом се показује да важи

Тврђење 2.6 (Принцип укључења и искључења). За произвољне скупове $A_1, A_2, \dots, A_n$ важи

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1}S_n,$$

где је $S_k = \sum |A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$ збир кардиналности свих пресека по k скупова. □

Пример 2.9. Колико има пермутација скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$ у којима после непосредно после броја 1 није 2, после броја 3 није 4, а после 5 није 6?

Решење. Нека је A_1 скуп пермутација у којима после 1 долази 2, A_2 скуп пермутација у којима после 3 следи 4, а A_3 скуп пермутација у којима после 5 следи 6. Пермутација скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$ укупно има $6! = 720$. Треба одузети $|A_1\cup A_2\cup A_3|$.

Пермутације у A_1 су „речи” састављене од сегмената 12, 3, 4, 5 и 6, па њих има 5!. Слично је и $|A_2| = |A_3| = 5!$.

Пермутације у $A_1\cap A_2$ су речи састављене од сегмената 12, 34, 5 и 6, па њих има 4!. Слично је и $|A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = 4!$.

Најзад, пермутације у $A_1\cap A_2\cap A_3$ су речи састављене од сегмената 12, 34 и 56 и има их 3!.

Према томе, $|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1{\cap}A_2| - |A_1{\cap}A_3| - |A_2{\cap}A_3| + |A_1{\cup}A_2{\cup}A_3| = 3\cdot 5! - 3\cdot 4! + 3! = 294$. Одговор је $720 - 294 = 426$.

2.5. Рекурзије у комбинаторици

Под *рекурзијом* подразумевамо свођење задатка на једноставнији случај самог себе. Рекурзија понекад елегантно решава проблеме које је другачије тешко решити.

Пример 2.10. Нека је n природан број. На колико начина се правоугаоник $2\times n$ може поплочати доминама 2×1?

Решење. Означимо са b_n тражени број поплочавања. Нека је страница дужине n хоризонтална. Посматрајмо домину D која покрива горњи десни угао. Она може бити усправна или водоравна.

- Ако је домина D усправна, преосталим доминама треба да поплочамо правоугаоник $2\times(n-1)$, што можемо учинити на b_{n-1} начина.
- Ако је домина D водоравна, онда и домина D' испод ње мора бити водоравна. Преосталим доминама треба да поплочамо правоугаоник $2\times(n{-}2)$, што можемо учинити на b_{n-2} начина.

Следи да је $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. Како је очигледно $b_1 = 1$ и $b_2 = 2$, добијамо $b_3 = 3$, $b_4 = 5$, $b_5 = 8$ итд, и уопште, b_n је $(n{+}1)$-ти Фибоначијев[2] број: $b_n = F_{n+1}$.

Испоставља се да се Фибоначијеви бројеви могу представити тзв. Бинеовом[3] формулом:

$$F_n = \frac{\phi^n - \bar\phi^n}{\sqrt5},\quad \text{где су}\quad \phi = \frac{1+\sqrt5}{2}\ \text{ и }\ \bar\phi = \frac{1-\sqrt5}{2}.$$

Ипак, пребројавањем рекурзијом по правилу добијамо резултат у облику низа задатог рекурентном везом, а општи члан таквог низа није увек могуће експлицитно описати. Зато се успешним решењем проблема често сматра већи и само налажење рекурентне везе.

Један тип рекурентних низова који се могу описати експлицитно су *линеарни рекурентни низови.*

[2] *Fibonacci* или *Leonardo Bonacci* (~1170~1250), италијански математичар
[3] *Jacques Philippe Marie Binet* (1786-1856), француски математичар и физичар

Дефиниција 2.5. Линеарна рекурен̄шна веза с̄шей̄ена k је релација облика

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}, \qquad (*)$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ дате константе.

Њен *карак̄шерис̄шични ӣолином* је полином

$$P(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k.$$

Ако је низ (x_n) задат везом $(*)$, да би био потпуно одређен, потребно је задати и првих k чланова: то могу бити нпр. $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Пример 2.11. Нека је низ (x_n) задат почетним члановима $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и рекурентном везом другог степена $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ за $n \geqslant 2$. Тада нам веза даје $x_2 = 2x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = 2x_2 + x_1 = 5$, $x_4 = 2x_3 + x_2 = 12$ итд.

Линеаран рекурентан низ се може експлицитно решити, под условом да умемо да одредимо нуле његовог карактеристичног полинома $P(x)$.

Тврђење 2.7. Нека се карактеристични полином $P(x)$ факторише као $P(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)^{r_i}$.

- За свако $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 0, 1, \ldots, r_i - 1$, низ $x_n = n^j \cdot \alpha_i^n$ задовољава везу $(*)$. Овим је дато $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = k$ независних низова који сви задовољавају $(*)$.
- Сваки низ који задовољава везу $(*)$ је линеарна комбинација ових k низова. □

Пример 2.12. Низ (x_n) је дат условима $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_n = 7x_{n-2} - 6x_{n-3}$ за $n \geqslant 3$. Наћи општи члан овог низа.

Решење. Карактеристични полином је $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$. То значи да општи члан низа (x_n) има облик $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot (-3)^n$ за неке константе A, B, C.

Константе A, B, C налазимо из почетних услова: $x_0 = 0 = A + B + C$, $x_1 = 1 = A + 2B - 3C$ и $x_2 = 2 = A + 4B + 9C$. Решавањем овог система добијамо $A = -\frac{3}{4}$, $B = \frac{4}{5}$ и $C = -\frac{1}{20}$. Према томе,

$$x_n = -\frac{3}{4} + \frac{4}{5} \cdot 2^n - \frac{1}{20}(-3)^n.$$

2.6. Задаци

1. Колико има n-тоцифрених бројева састављених од цифара $1, 2, 3$ у којима су сваке две суседне цифре различите?
2. Колико има петоцифрених бројева који садрже бар две цифре 9? (Прва цифра не сме бити 0.)
3. Колико има различитих анаграма (речи добијених размештањем слова) речи МАТЕМАТИКА?
4. На колико начина се може распоредити 16 различитих птица у 10 различитих кавеза тако да се у сваком кавезу налази бар једна, а највише две птице?
5. Колико има решења једначине $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 10$ у скупу ненегативних целих бројева?
6. Кандидати за чланство у управном одбору неке фирме су по четворо Немаца, Руса и Турака, и то из сваког народа по два мушкарца и две жене. Управни одбор је по правилу четворочлан и мора да укључује представника из сваког народа, као и оба пола. На колико начина се може изабрати управни одбор?
7. На колико начина се поља квадратне таблице 8×8 могу обојити плавом, црвеном и зеленом бојом, ако у сваком правоугаонику 3×1 (водоравном или усправном) све три боје морају бити различите?
8. Потребно је обојити поља квадратне таблице 3×3 у четири боје - црвену, плаву, зелену и жуту, али тако да у свакој врсти или колони сва три поља имају различите боје. На колико начина се ово може учинити?

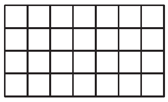
9. На доњем левом угаоном пољу шаховске табле 5×5 налази се краљ. Он се у сваком потезу помера за једно поље нагоре или удесно. На колико начина краљ може стићи до горњег десног угаоног поља?

10. На доњем левом угаоном пољу шаховске табле 5×5 налази се краљ. Он се у сваком потезу помера за једно поље нагоре, удесно или дијагонално горе-десно. На колико начина краљ може стићи до горњег десног угаоног поља?

11. У равни је нацртано 20 правих, при чему никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у истој тачки. На колико области (коначних или бесконачних) оне деле раван?

12. На колико начина се може прочитати реч ТРОУГАО са слике, полазећи са једне од ивица?

Т
Т Р Т
Т Р О Р Т
Т Р О У О Р Т
Т Р О У Г У О Р Т
Т Р О У Г А Г У О Р Т
Т Р О У Г А О А Г У О Р Т

13. Колико има правоугаоника на слици? 

14. Дати комбинаторни доказ тврђења 2.5(б).

15. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ које не почињу двојком и не завршавају се непарним бројем?

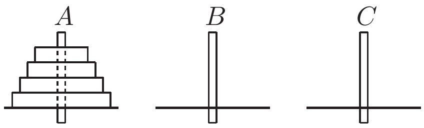
16. Колико има различитих (недегенерисаних) троуглова са обимом 99 чије су странице природни бројеви?

17. Колико има тројки природних бројева (a, b, c) у којима је $a < b < c$, $a \leqslant 10$, $b \leqslant 15$ и $c \leqslant 20$?

18. Колико има пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је $a_i \neq i$ за свако i?

19. Наћи општи члан низа датог условима $x_0 = x_1 = 1$ и $x_n = 5x_{n-1} - 6x_n$ за $n \geqslant 2$.

20. *(Ханојска кула)* Дата су три стуба A, B и C. На стубу A је наслагано n дискова различите величине, мањи изнад већих. У сваком потезу је дозвољено пребацити један диск са једног стуба на други, при чему се не сме поставити већи диск на мањи. Колико је најмање потеза потребно да се цела кула пребаци на стуб B?



2.7. Решења

1. Прву цифру можемо одабрати на три начина, а сваку следећу на два. То укупно даје $3 \cdot 2^{n-1}$ могућности.

2. Петоцифрених бројева укупно има $9 \cdot 10^4 = 90000$. Од тог броја треба одбацити следеће.
   - Бројеве без иједне деветке: има их $8 \cdot 9^4$ (прва цифра има 8 могућности, остале по 9).
   - Бројеве са само једном деветком, и то као првом цифром: њих има 9^4 (свака цифра осим прве има 9 могућности).
   - Бројева са само једном деветком, али не на првом месту. Позиција деветке се може одабрати на 4 начина. Прва цифра има 8 могућности, а остале три по 9. У овом случају има $4 \cdot 8 \cdot 9^3$ бројева.

   Према томе, резултат је $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 - 9^4 - 4 \cdot 8 \cdot 9^3 = 7623$.

3. Реч МАТЕМАТИКА има 10 слова, међу којима су три слова А, по два слова М и Т и по једно слово Е, И, К. Укупан број пермутација је зато $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$.

4. У шест кавеза ће се налазити по две птице, а у четири по једна. Шест кавеза са по две птице могу се одабрати на $\binom{10}{6}$ начина. Затим се две птице за први кавез могу одабрати на $\binom{16}{2}$ нажина, две птице за други кавез (од преосталих 14) на $\binom{14}{2}$ начина, две за трећи на $\binom{12}{2}$ начина, итд, две за шести кавез на $\binom{6}{2}$ начина. Остале су четири птице да их распоредимо у 4 преостала кавеза, што се може учинити на 4! начина.

   Укупно има $\binom{10}{6} \cdot \binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2} \cdot 4! = \frac{16!}{2^6}\binom{10}{6} = 68.652.904.320.000$ начина.

5. Посматрајмо низ од 10 куглица. Њих треба помоћу 9 преграда поделити на 10 група (неке могу бити и празне). На пример, решење $2+0+3+0+1+1+2+0+1+0 = 10$ бисмо добили оваквим постављањем преграда: $\circ\circ\,|\,|\,\circ\circ\circ\,|\,|\,\circ\,|\,\circ\,|\,\circ\circ\,|\,|\,\circ\,|$.

   Дакле, имамо низ од 10 куглица и 9 преграда, дужине 19. Наравно, таквих низова има $\binom{19}{10}$.

6. Два члана одбора су исте националности, која се може одабрати на 3 начина - рецимо да су то Немци. Имамо следеће случајеве.

   (i) Двоје Немаца истог пола могу се одабрати на 2 начина - рецимо, две Немице. Још по један од Руса и Турака може се одабрати на 16 начина, али то не смеју бити Рускиња и Туркиња (4 начина отпадају). Укупно $2 \cdot (16 - 4) = 24$ могућности.

   (ii) Један Немац и једна Немица могу се одабрати на 4 начина. Руси и Турци могу се одабрати било како - 16 начина. Укупно $4 \cdot 16 = 64$ могућности.

   Укупно има $3 \cdot (24 + 64) = 264$ начина.

7. У свакој врсти и колони се морају периодично ређати све три боје. Нека су боје у првој врсти 12312312. За другу врсту постоје само две могућности: 23123123 или 31231231 При томе се боје 1 и 2 могу одабрати на 6 начина. Тако је број могућих бојења $2 \cdot 6 = 12$.

8. Прву врсту можемо обојити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Означимо боје у њој редом са 1, 2 и 3: тј. прва врста је 123. Боја "4" се може појавити ниједном, једном или двапут у остатку таблице.

   (0°) Нема боје 4. Тада друге две врсте могу бити само 231 и 312, или обрнуто. Само две могућности.

   (1°) Само једно поље има боју 4. То поље се може одабрати на 6 равноправних начина - рецимо да је то прво поље друге врсте. За прво поље имамо два равноправна избора - боје 2 и 3. Одаберимо боју 2. Тада друга и трећа врста имају само једно могуће бојење: 412 и 231, редом. Овде имамо $6 \cdot 2 = 12$ могућности.

   (2°) Два поља имају боју 4: по једно у другој и трећој врсти. Пошто та два поља нису у истој колони, можемо их одабрати на 6 равноправних начина. Пдаберимо прво поље друге и друго поље треће врсте. Друга врста може бити 412 (тада је трећа врста 241 или 341), 431 (тада је трећа врста 342) или 432 (опет је трећа врста 241 или 341). Избројали смо $6 \cdot 5 = 30$ могућности.

   Укупан број могућих бојења је $24 \cdot (2 + 12 + 30) = 1056$.

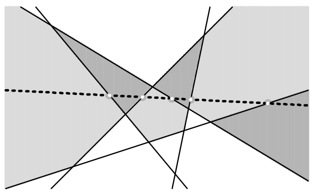
9. Краљ треба да направи 4 хоризонтална и 4 вертикална корака, што је укупно 8 потеза. Редни бројеви 4 хоризонтална потеза из скупа $\{1, 2, \ldots, 8\}$ могу се одабрати на $\binom{8}{4} = 70$ начина. Према томе, одговор је 70.

10. Ово више не може да се преброји елегантно попут претходног задатка. Уместо тога, за свако поље табле израчунаћемо број начина да га краљ досегне.

1	9	41	129	321
1	7	25	63	129
1	5	13	25	41
1	3	5	7	9
К	1	1	1	1

   До поља $(2, 1)$ (тј. 2. врсте одоздо и 1. колоне слева) краљ може доћи на само један начин. Исто важи за свако од поља $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$. Даље, до поља $(2, 2)$ краљ може стићи на 3 начина: по један начин за долазак са сваког од поља $(1, 2), (1, 1), (2, 1)$. До поља $(2, 3)$ краљ може стићи на 5 начина: три ако долази с поља $(2, 2)$, а по један ако долази с поља $(1, 2)$ или $(1, 3)$, и тако даље... Таблица приказује за свако поље на колико начина се може стићи до њега. Као што видимо, одговор је 321.

11. Нула правих „деле" раван на једну област. Цртајмо праве једну по једну. Када доцртамо n-ту праву, она ће сећи n области (јер сече свих $n-1$ дотад нацртаних правих), чиме ће се број области увећати за n. Дакле, кад нацртамо 20-ту праву, имаћемо $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} + 1 = 211$ области.



12. Усправну реч ТРОУГАО по средини зваћемо *кичмом.* Свако читање тражене речи може се завршити једино у слову О на дну кичме. Штавише, када током читања доспемо на кичму, можемо наставити само надоле. Према томе, читава реч се налази или у левој половини (укључујући и кичму), или у десној.

    (i) Нека је цела реч у левој половини. Прочитајмо је отпозади („ОАГУОРТ”) почев од слова О на дну кичме. За свако слово од наредних 6 слова бираћемо између два смера читања: налево и нагоре. Дакле, целу реч можемо прочитати на $2^6 = 64$ начина.

    (ii) Ако је цела реч у десној половини, опет имамо 64 начина.

    То је укупно 128 начина. Међутим, усправна реч дуж кичме убројана је у оба случаја, па њу морамо одузети. Тако је одговор 127.

13. Нека је $ABCD$ један од правоугаоника. Ако знамо пар темена (A, C), знамо цео правоугаоник.

    Теме A може се одабрати на $5 \cdot 8 = 40$ начина. Наспрамно теме C се налази у једној од преостале 4 врсте и 7 колона, те њега можемо одабрати на $4 \cdot 7 = 28$ начина. Дакле, могућих парова (A, C) има $40 \cdot 28 = 1120$.

    Избројали смо 1120 правоугаоника. Међутим, сваки од њих је бројан четири пута - парови (A, C), (C, A), (B, D) и (D, B) сви одређују исти правоугаоник. Зато резултат морамо да поделимо са 4. Резултат је $1120/4 = 280$.

14. Шта пребројава израз $\binom{n}{k}\binom{k}{r}$? Рецимо да имамо n шоља кафе, од којих треба да у k ставимо млеко, а од тих k, у r треба да ставимо и шећер. Дакле, шоље у које додајемо млеко бирамо на $\binom{n}{k}$ начина, а оне у које додајемо шећер на $\binom{k}{r}$ начина. Укупно $\binom{n}{k}\binom{k}{r}$ начина.

    Истом питању можемо и овако приступити: r шоља у које додајемо шећер и млеко могу се одабрати на $\binom{n}{r}$ начина. Још $k - r$ од преосталих $n - r$ шоља, у које додајемо само млеко, могу се одабрати на $\binom{n-r}{k-r}$ начина. Укупно $\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$ начина.

15. Укупан број пермутација је 6!. Од тог броја треба одузети пермутације које почињу двојком (има их 5!) и пермутације које се завршавају непарном цифром (њих има $3 \cdot 5!$). Међутим, $3 \cdot 4!$ пермутација које почињу двојком *и* завршавају се непарном цифром одузете су двапут, па њихов број треба додати. Дакле, одговор је $6! - 5! - 3 \cdot 5! + 3 \cdot 4! = 312$.

16. Означимо странице троугла са $a \leqslant b \leqslant c$. Најдужа страница c није мања од 33, а због $99 - c = a + b > c$ није ни већа од 49. Даље, за страницу b важи $\frac{99-c}{2} = \frac{a+b}{2} \leqslant b \leqslant c$.
    – за $c = 49$ је $25 \leqslant b \leqslant 49$: 25 могућности;
    – за $c = 48$ је $26 \leqslant b \leqslant 48$: 23 могућности;
    – за $c = 47$ је $26 \leqslant b \leqslant 47$: 22 могућности;
    (итд...)
    – за $c = 33$ је $33 \leqslant b \leqslant 33$: 1 могућност.
    Укупан број могућих троуглова је $25+23+22+20+19+17+16+14+13+11+10+8+7+5+4+2+1 = 8 \cdot 27 + 1 = 217$.

17. Бројимо подскупове $\{a, b, c\}$ скупа $\{1, 2, \ldots, 20\}$ који задовољавају услове, где је $a < b < c$. Укупан број оваквих подскупова је $\binom{20}{3}$, али треба одузети оне у којима је $a > 10$ или $b > 15$.

    Ако је $a > 10$, онда је $\{a, b, c\}$ подскуп скупа $\{11, 12, \ldots, 20\}$, а таквих има $\binom{10}{3}$.

    Ако је $a \leqslant 10$ и $b > 15$, онда је $\{b, c\}$ подскуп скупа $\{16, 17, \ldots, 20\}$, а a се може одабрати на 10 начина. Оваквих подскупова $\{1, b, c\}$ има $10\binom{5}{2}$.

    Све у свему, тражених подскупова има $\binom{20}{3} - \binom{10}{3} - 10\binom{5}{2} = 1140 - 240 - 100 = 800$.

18. За $i = 1, 2, \ldots, n$, са A_i ћемо означити скуп пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ у којима је $a_i = i$. Треба искључити све пермутације из скупа $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

    Одредимо $S_k = \sum |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$. У овој суми има $\binom{n}{k}$ сабирака. При томе, за дате индексе $i_1, i_2, \ldots, i_k$ скуп $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ се састоји од пермутација у којима је $a_{i_1} = i_1$, $a_{i_2} = i_2$, ..., $a_{i_k} = i_k$. Такве пермутације пермутују само $n - k$ елемената различитих од $i_1, \ldots, i_k$, те њих има $(n-k)!$. Дакле, сваки од сабирака $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ је једнак $(n-k)!$, док је $S_k = \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$.

    По формули укључења и искључења је $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$.

    Дакле, резултат је $n! - n! \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$. То је природан број најближи броју $n!/e$.

19. Карактеристични полином дате рекурентне везе је $x^2 - 5x + 6$, а његове нуле су 2 и 3. Зато је $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ за неке константе A и B. При томе је $x_0 = 1 = A + B$ и $x_1 = 1 = 2A + 3B$, одакле се добија $A = 2$ и $B = -1$. Према томе, $x_n = 2 \cdot 2^n - 3^n = 2^{n+1} - 3^n$.

20. Означимо потребан број потеза са T_n.

    У једном моменту ћемо пребацити највећи диск са A на B; у том моменту ће осталих $n - 1$ дискова морати да леже поређани по величини на стубу C. Пренос ових $n - 1$ дискова са A на C изискује бар T_{n-1} потеза, и потом још T_{n-1} потеза да се они пребаце на највећи диск на стубу B. Дакле, $T_n = 2T_{n-1} + 1$. Како је $T_1 = 1$, индукцијом се добија $T_n = 2^n - 1$.