Konvergencija redova
(dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Ispitati konvergenciju reda

   a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$;

   b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$;

   c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+m)}$,
   gde je m dati prirodan broj i ukoliko konvergira, izračunati njegovu sumu.

2. Dokazati da redovi

   a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(\sqrt[3]{k} - \frac{100}{k} - \ln k)(\sqrt[4]{k} + e)}$

   b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k k}{k^2 - 5k - \pi}$

   konvergiraju u običnom, ali ne i u apsolutnom smislu.

Uputstva i konačni odgovori

1. Iskoristiti razlaganje

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   i uopšte

$$\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\frac{(k+m)-k}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right)$$

   Odgovori a) 1; b) 3/4; c) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}}{m}$.

2. Iskoristiti da su dati redovi, što se apsolutne konvergencije tiče, ekvikonvergentni sa redovima čiji su opšti sabirci $\dfrac{1}{k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{k^{\frac{7}{12}}}$, odnosno $\dfrac{k}{k^2} = \dfrac{1}{k}$, za koje je poznato da divergiraju.

   Što se obične konvergencije tiče, nju dokazujemo Lajbnicovim kriterijumom na standardan način. U delu pod b) treba se treba uveriti da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2-5x-\pi}$ opadajuća za x počev od neke pozitivne realne vrednosti a i da teži nuli kad x teži $+\infty$. U delu pod a) je dovoljno konstatovati da funkcije $(\sqrt[3]{x} - \frac{100}{x} - \ln x)$ i $(\sqrt[4]{x} + e)$ rastu i teže $+\infty$, jer će onda to slediti i za njihov proizvod (monotonost se ispituje preko 1.izvoda). Odatle neposredno sledi da će recipročna vrednost njihovog proizvoda monotono opadajuće težiti ka 0.

Lajbnicov kriterijum nam je neophodan za one naizmenične redove koji ne konvergiraju apsolutno, npr. da smo pod b) imali red $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2 - 5k - \pi}$, on bi na planu apsolutne konvergencije bio ekvikonvergentan sa redom $\dfrac{1}{k^2}$, što bi značilo da konvergira aposlutno, a samim tim i u običnom smislu.

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu