Математика 3 - писмени део испита 11.7.2015.

Група 1 - решења

1. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'' + 2y' + y = \cos x$$

које испуњава услове

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

<u>Решење</u>. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Решења карактеристичне једначине су $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, одакле добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = xe^{-x}$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

Партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо методом неодређених коефицијената. Како се њена десна страна може написати у облику

$$\cos x = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)\right]$$

за $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_m(x) = 1$, $Q_l(x) = 0$, и како $\alpha + \beta i = i$ није решење карактеристичне једначине, то партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

где је $k = \max\{m, l\} = 0$. На основу претходног следи

$$y_p = A\cos x + B\sin x,$$

где су A и B непознате вредности које треба одредити. Лако добијамо

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x,$$

а након уврштавања y_p, y_p' и y_p'' у полазну једначину добијамо

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x.$$

Претходну једначину задовољавају константе

$$A = 0, \qquad B = \frac{1}{2},$$

па је

$$y_p = \frac{1}{2}\sin x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_p,$$

односно

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x. \tag{1}$$

Одавде је

$$y' = (-c_1 + c_2 - c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x. \tag{2}$$

Ако у (1) уврстимо услов $y(0) = 1$, а у (2) услов $y'(0) = \frac{1}{2}$, добијамо

$$c_1 = 1, \qquad -c_1 + c_2 = 0,$$

одакле следи

$$c_1 = c_2 = 1,$$

па је тражено партикуларно решење

$$y = (1 + x)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

2. Одредити векторске линије векторског поља

$$\vec{A} = x^2\vec{i} - \frac{1}{\ln y}\vec{j} - e^{3z}\vec{k}.$$

Затим одредити дивергенцију и ротор датог векторског поља у тачки $M(0, e, 0)$.

Решење. Векторске линије поља $\vec{A}$ одређујемо из одговарајућег система диференцијалних једначина у симетричном облику

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-\frac{1}{\ln y}} = \frac{dz}{-e^{3z}}.$$

Из једнакости

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-\frac{1}{\ln y}}$$

након интеграције имамо

$$c_1 = y\ln y - y - \frac{1}{x},$$

а из једнакости

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-e^{3z}},$$

након интеграције следи

$$c_2 = \frac{1}{3e^{3z}} + \frac{1}{x}.$$

Дивергенција у тачки $M(0, e, 0)$ је

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= \nabla \circ \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ \left(x^2, -\frac{1}{\ln y}, -e^{3z}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\ln y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-e^{3z}\right) = 2x + \frac{1}{y\ln y} - 3e^{3z} \\
&= \{M(0, e, 0)\} = \frac{1}{e} - 3,
\end{aligned}$$

док је ротор у тачки $M(0, e, 0)$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -\dfrac{1}{\ln y} & -e^{3z} \end{vmatrix} = \vec{0} = \{M(0,e,0)\} = \vec{0}.$$

3. Израчунати

$$\int_L x^2 \sin y dx + y \cos x dy,$$

где је L троугао са теменима $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(2,3)$.
Решење. Важи

$$\begin{aligned} I &= \int_L x^2 \sin y dx + y \cos x dy = \left\{ \begin{array}{c} \text{Гринова} \\ \text{формула} \end{array} \right\} \\ &= \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}(y \cos x) - \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2 \sin y\big) \right] dxdy \\ &= -\iint_G \big(y \sin x + x^2 \cos y\big)\, dxdy \end{aligned}$$

где је G област омеђена троуглом L. Како је $y = x$ једначина праве кроз тачке A и B, а $y = 2x - 1$ једначина праве кроз тачке A и C, то су границе $x|_1^2$, $y|_x^{2x-1}$, па је

$$\begin{aligned} I &= -\int_1^2 dx \int_x^{2x-1} \big(y \sin x + x^2 \cos y\big)\, dy \\ &= -\int_1^2 \left[\frac{\sin x}{2} y^2 + x^2 \sin y \right] \Bigg|_x^{2x-1} dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^2 (x+1)^2 \sin x dx - \int_1^2 x^2 \sin(2x-1) dx = \cdots \\ &= 6\cos 3 - \frac{5}{2}\cos 2 - \frac{7}{2}\cos 1 - 8\sin 3 + 8\sin 2 + \sin 1. \end{aligned}$$

4. Израчунати запремину тела омеђеног површима $x = 1 + \sqrt{y^2 + z^2}$ и $x = 2$.
Решење. Тражену запремину рачунамо као

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_G dydz \int_{1+\sqrt{y^2+z^2}}^{2} \\
&= \iint\limits_G \left[2-(1+\sqrt{y^2+z^2})\right] dydz = \iint\limits_G \left(1-\sqrt{y^2+z^2}\right) dydz.
\end{aligned}
$$

Овде је са T означено тело омеђено конусом $x = 1+\sqrt{y^2+z^2}$ "одоздо"и равни $x = 2$ "одозго", док је G унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека датог конуса и дате равни на Oyz раван, за коју се добија

$$G : y^2+z^2 \leq 1.$$

Преласком на поларне координате

$$y = \rho\cos\varphi, \qquad z = \rho\sin\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D : \rho^2 \leq 1.$$

Јакобијан је $J = \rho$, а границе су $\rho|_0^1$, $\varphi|_0^{2\pi}$. Даље је

$$I = \iint\limits_D \left(1-\sqrt{\rho^2}\right)\cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho)\rho d\rho = 2\pi\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$