Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за Математику

25.06.2014. године
група: 1

Решења задатака са писменог испита из Математике 2 јун 2014. године

1. Важно је напоменути да је потребно нацртати скицу површине... Облик једначине дате криве је:

$$y = \frac{1}{x^2+2x+3}$$

тако да је тражена површина:

$$P = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\bigg|_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$$

Ако је именилац квадратни трином ax^2+bx+c препоручује се увођење линеарне смене:

$$x = t - \frac{b}{2a} \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

и у случају овог задатка спроведена је смена $x = t-1 \Rightarrow t = x+1$ gde je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Тражена запремина износи:

$$V = \pi\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\,\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2}$$

I начин:

Уведимо смену:

$$t = \sqrt{2}\operatorname{tg}u\bigg|_{t=0\Rightarrow u=0}^{t=2\Rightarrow u=\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{2}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$$

јер је:

$$t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(\operatorname{tg}^2 u+1\right) = 2\left(\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}+1\right) = 2\left(\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\cos^2 u}\right) = \frac{2}{\cos^2 u}$$

Коначно запремина је једнака:

$$\begin{aligned}
V &= \int\limits_0^{arctg\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{2}{\cos^2 u}\right)^2} \cdot \sqrt{2}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int\limits_0^{arctg\sqrt{2}} \cos^2 u \mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \int\limits_0^{arctg\sqrt{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{arctg\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

II начин:

Познатији је са вежби и састоји се у коришћењу парцијалне интеграције. Ако означимо $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$ где је $a = \sqrt{2}$, тада трансформишимо I_2 на следећи начин:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{a^2} \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2} \int \left(\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2} \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Изаберимо за парцијалну интеграцију следеће делове подинтегралне функције:

$$\begin{aligned}
u &= x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
v &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+a^2\right)}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)}
\end{aligned}$$

Коначно је:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{a^2} \left\{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \left[-\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)} - \int \left(-\frac{\mathrm{d}x}{2\left(x^2+a^2\right)}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} + \frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right)
\end{aligned}$$

У траженим границама важи:

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{t^2+2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \frac{1}{12}$$

Овај начин решавања експлицитно даје вредност интеграла, за разлику од првог начина. Може се једноставно показати да је $\sin\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, чиме би се потврдила једнакост израза, где се резултат добијен у тригонометријском облику признаје потпуно равноправно. Тражена запремина је једнака:

$$V = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \frac{1}{12}\right)$$

2. Тангента раван T криве $z = f(x, y)$ у тачки A одређена је са $T = \langle A, \operatorname{grad}(f)\rangle$. Тачка је дата $A(1, -1, 0)$, и потребно је наћи:

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)_{(A)}$$

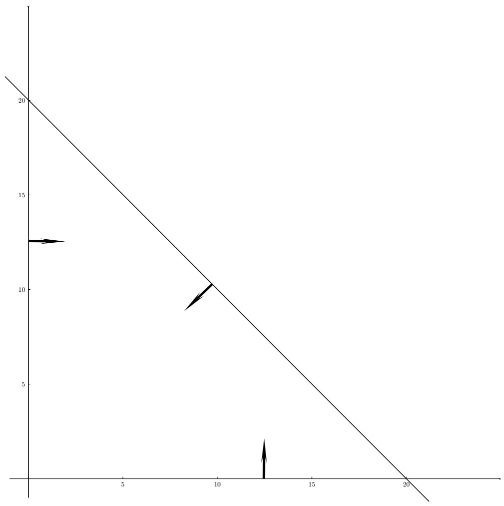
Kako je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \sin\pi y\cdot e^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\cdot\frac{2x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\pi y\cdot e^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \cos\pi y\cdot\pi\cdot e^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}} + \sin\pi y\cdot e^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\cdot 2y\\
&= e^{-\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\left(\pi\cos\pi y - \frac{y\sin\pi y}{\sqrt{\frac{x^2}{2}+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

тада je $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(A)} = 0$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(A)} = -\pi\cdot e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}}$. Vektor ravni T je $\operatorname{grad}(f) = \left(0, \frac{\pi}{e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}}, -1\right)$, odakle je jednačina ravni:

$$\begin{aligned}
T &: \quad 0(X-1) + \pi\cdot e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}}(Y+1) - 1(Z-0) = 0 \Rightarrow\\
T &: \quad \frac{\pi}{e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}}Y - Z + \frac{\pi}{e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}} = 0
\end{aligned}$$

3. Област дефинисаности функције је $x > 0$, $y > 0$ и $20 - x > y$.



Slika 1: Oblast definisanosti funkcije $u = 4\ln x + 5\ln y + \ln(20 - x - y)$

Израчунајмо $\nabla = 0$. Како је:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{4}{x} + \frac{1}{20 - x - y} \cdot (-1) = \frac{4}{x} - \frac{1}{20 - x - y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{5}{y} + \frac{1}{20 - x - y} \cdot (-1) = \frac{5}{y} - \frac{1}{20 - x - y}
\end{aligned}$$

Из услова $\nabla = 0$ следи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ &\Rightarrow \ \frac{4}{x} - \frac{1}{20 - x - y} = 0 \Rightarrow \frac{80 - 4x - 4y - x}{x(20 - x - y)} \Rightarrow 80 - 5x - 4y = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ &\Rightarrow \ \frac{5}{y} - \frac{1}{20 - x - y} = 0 \Rightarrow \frac{100 - 5x - 5y - y}{x(20 - x - y)} \Rightarrow 100 - 5x - 6y = 0
\end{aligned}$$

Добија се једноставан линеарни систем једначина:

$$\begin{array}{ccccccl}
\boxed{5x} & + & 4y & = & 80 & & {}^{-1} \\
5x & + & 6y & = & 100 & \leftarrow & {}_{+}
\end{array}$$

чија су решења $y = 10$ и $x = 8$. Могућа екстремна тачка је $A(8, 10)$. Да би потврдили екстрем, неопходно је испитати $H(f)_{(A)}$. Како је:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

потребно је израчунати:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{4}{x^2} - \frac{-1}{(20-x-y)^2}\cdot(-1) = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(20-x-y)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(A)} = -\frac{5}{16}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{-1}{(20-x-y)^2}\cdot(-1) = -\frac{1}{(20-x-y)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(A)} = -\frac{1}{4}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{5}{y^2} - \frac{-1}{(20-x-y)^2}\cdot(-1) = -\frac{5}{y^2} - \frac{1}{(20-x-y)^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(A)} = -\frac{6}{20}.
\end{aligned}
$$

Тражена матрица је једнака:

$$
H(f)_A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{6}{20} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}
$$

Добијена матрица је позитивно дефинитна, јер је:

$$
\left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0
$$

одакле је $H(f)_A$ негативно дефинитна. У $A(8,10)$ дата функција има максимум.

4. Дата диференцијална једначина се може на следећи начин довести до Бернулијеве диференцијалне једначине:

$$
\begin{aligned}
2y + \left(x^2y+1\right)xy' = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2y + \left(x^2y+1\right)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\\
&\Rightarrow \quad 2y\,\mathrm{d}x + \left(x^2y+1\right)x\,\mathrm{d}y = 0\\
&\Rightarrow \quad 2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + x^3y + x = 0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + x^3\frac{y}{2y} + x\frac{1}{2y} = 0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2y}\cdot x = -\frac{1}{2}\cdot x^3\\
&\Rightarrow \quad x' + \frac{1}{2y}\cdot x = -\frac{1}{2}\cdot x^3
\end{aligned}
$$

Добијена једначина је Бернулијева по x, односно добијена је једначина облика:

$$
x' + p(y)\cdot x = q(y)\,x^{\alpha}
$$

за чије решавање се препоручује смена $x = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ где је $z = z(y)$. У датом задатку је:

$$
x = z^{\frac{1}{1-\alpha}} = z^{\frac{1}{1-3}} = z^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z'
$$

После смене дата диференцијална једначина једнака је:

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' + \frac{1}{2y}z^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow z' - \frac{1}{y}z = 1$$

Диференцијална једначина која је добијена је линеарна нехомеогена:

$$\begin{aligned}
z_{or} &= e^{-\int p(y)\mathrm{d}y}\left(c + \int q\left(y\right)e^{\int p(y)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\right) \\
&= e^{\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(c + \int 1 \cdot e^{-\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) \\
&= e^{\ln y}\left(c + \int 1 \cdot e^{-\ln y}\mathrm{d}y\right) \\
&= y\left(c + \int 1 \cdot \frac{1}{y}\mathrm{d}y\right) \\
&= y\left(c + \ln y\right)
\end{aligned}$$

Односно опште решење полазне диференцијалне једначине је:

$$x^{-2} = y\left(c + \ln y\right)$$

Партикуларно решење налазимо из:

$$1^{-2} = 2\left(c + \ln 2\right) \Rightarrow 1 - 2\ln 2 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \ln 2$$

одакле је:

$$x^{-2} = y\left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \ln y\right) \Rightarrow x^{-2} = y\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{y}{2}\right)$$

тражено партикуларно решење.

доц. др Александар Пејчев
проф. др Слободан Радојевић