Математика 3

Душан Ђукић

1. Опште диференцијалне једначине

1.1. Увод

У општем случају, диференцијална једначина реда n је једначина облика

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где је F нека функција по промењљивој x, непознатој функцији y и њеним изводима $y', \ldots, y^{(n)}$.

Опште решење диференцијалне једначине реда n обично зависи од n *слободних константи* $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Можемо га добити у неком од следећих облика:

- експлицитни облик: $y = f(x; C_1, \ldots, C_n)$;
- имплицитни облик: $f(x, y; C_1, \ldots, C_n) = 0$;
- параметарски облик: $x = g(t; C_1, \ldots, C_n)$, $y = h(t; C_1, \ldots, C_n)$.

Најзад, понекад постоје и решења која се не уклапају у опште ни за који избор слободних константи $C_1, \ldots, C_n$ (чак ни бесконачних). Та решења зовемо *сингуларним* и обично се појаве онда када у процесу решавања једначине делимо нечим што може бити нула. У овом курсу ћемо се задовољавати проналажењем општег решења.

Пример 1.1. Опште решење једначине $y'^2 = y$ је $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$.

Заиста, имамо $dy/dx = y' = \pm\sqrt{y}$ и одатле $dx = \pm dy/\sqrt{y}$, што интеграцијом даје $x + C = \pm 2\sqrt{y}$.

Међутим, функција $y = 0$ је такође решење, а не добија се ни за један избор константе C. То је сингуларно решење.

1.2. Формирање једначине на основу општег решења

...Дато је решење, наћи задатак...

Наш први контакт са овим питањем био је у Математици 2, у одређивању ортогоналних трајекторија. Фамилија кривих, задата једначином облика $f(x, y, C) = 0$ са слободном константом C, могла се описати као опште решење диференцијалне једначине првог реда.

Сада замислимо да имамо n слободних константи $C_1, \ldots, C_n$. Дакле, имамо фамилију функција дату једначином облика

$$y = f(x; C_1, \ldots, C_n), \quad \text{или имплицитно}, \quad F(x, y; C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

И она се може описати као опште решење диференцијалне једначине, али реда n. Наиме, сама једначина функције y и њени изводи до n-тог реда даће нам систем са $n + 1$ једначина по n „непознатих” $C_1, \ldots, C_n$. Теоријски, из n од њих можемо да „решимо” тај систем, изражавајући константе C_i преко функције y и њених извода. Уметањем добијених израза за C_i у преосталу једначину добићемо диференцијалну једначину по y реда n.

Пример 1.2. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$.

Решење. Због две слободне константе тражена једначина имаће ред 2. Налазимо

$$y' = \frac{-C_1}{(C_1x+C_2)^2} \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{2C_1^2}{(C_1x+C_2)^3}.$$

Из прве једнакости налазимо $C_1 = -y'/y^2$. Како је $C_1x + C_2 = 1/y$, заменом у другу једнакост добијамо $y'' = -\frac{2y'^2}{y^4} \cdot y^3$, тј.

$$yy'' = 2y'^2.$$

Подсетимо се и шта је то линеарна независност:

- Функције $y_1, \dots, y_n$ су *линеарно независне* ако не постоје константе $C_1, \dots, C_n$ које нису све нула такве да је $y = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n = 0$.

Под претпоставком да су функције $y_1, \dots, y_n$ диференцијабилне $n-1$ пута, један погодан начин да се утврди њихова линеарна нешависност је израчунавање њихове *детерминанте Вронског*[1]:

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Наиме, ако су функције $y_1, \dots, y_n$ линеарно зависне, онда је једна од колона у детерминанти Вронског линеарна комбинација осталих, те је вредност детерминанте нула. Другим речима, ако је $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ у макар једној тачки, то је сигуран знак да су функције $y_1, \dots, y_n$ линеарно независне.

Нека нам је сада дато је n линеарно независних n пута диференцијабилних функција $y_1, y_2, \dots, y_n$ по променљивој x. Како наћи диференцијалну једначину чије је опште решење

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n?$$

Описани поступак елиминације константи $C_1, \dots, C_n$ једне по једне свакако је дозвољен. Ипак, у овом случају детерминанта Вронског нам даје пречицу. Функције $y_1, \dots, y_n$ и y су линеарно зависне, те је њихова детерминанта Вронског (димензија $(n+1)\times(n+1)$) једнака нули:

$$W[y, y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

а она је након развијања ништа друго до линеарна диференцијална једначина по y реда n.

Пример 1.3. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = C_1(x+1) + C_2\sqrt{x}$.

Решење. Имамо $y_1 = x+1$ и $y_2 = x^{1/2}$, па је $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$ и $y_2' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $y_2'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. Следи да је

$$0 = W[y, y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y & x+1 & x^{1/2} \\ y' & 1 & \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ y'' & 0 & -\frac{1}{4}x^{-3/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y + \frac{1}{4}x^{3/2}(x+1)y' - \frac{1-x}{2}x^{-1/2}y'',$$

што множењем са $4x^{3/2}$ постаје $2(x^2-x)y'' + (x+1)y' - y = 0$.

1.3. Једначине у којима не учествује y или x

У овим случајевима погодним сменама снижавамо ред дате диференцијалне једначине за један.

- **Случај 1.** Претпоставимо да у диференцијалној једначини не учествује функција y, мада учествују изводи $y', \dots, y^{(n)}$.

Ово је очигледнији случај: смена $z(x) = y'(x)$ одмах своди једначину на нову једначину по z реда $n-1$.

[1] *Józef Maria Hoene-Wroński* (1776-1853), пољски научник

Пример 1.4. Решити једначину $y' = xy''$.

Решење. Сменом $z = y'$ добијамо $z = xz' = xdz/dx$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $dz/z = dx/x$. Интеграција даје $\ln|z| = \ln|x| + C$, тј. $|z/x| = e^C$, одакле је $y' = z = C_0 x$ за неку константу C_0. Још једна интеграција даје коначно $y = \int y' dx = C_1 x^2 + C_2$, где су $C_1 (= \frac{1}{2} C_0)$ и C_2 произвољне константе.

Пример 1.5. Решити једначину $y'^3 - y' = x$.

Решење. Ово је пример једначине која се решава параметарски. Означимо $y' = t$, тако да је $t^3 - t = x$. Тада је $dx = (3t^2 + 1)dt$, па имамо

$$y = \int y' dx = \int t(3t^2 + 1)dt = \tfrac{3}{4} t^4 + \tfrac{1}{2} t^2 + C.$$

Добили смо решење у параметарском облику: $(x, y) = (t^3 - t, \frac{3}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^2 + C)$.

- **Случај 2.** Претпоставимо да у диференцијалној једначини не учествује променљива x, мада учествују функција y и њени изводи по x: $y', \ldots, y^{(n)}$. Овакве једначине се називају *аутономне*.

Настојимо да се потпуно ослободимо невидљиве променљиве x. Сећање на њу још чува њен диференцијал dx, а он је свуда, јер сви изводи су по x: наиме, $y' = dy/dx$, $y'' = d(\frac{dy}{dx})/dx$ итд.

Идеја је да одредимо како y' зависи од y. Другим речима, y проглашавамо за нову променљиву, а $y' = z(y)$ за непознату функцију по y. Како је $dx = dy/z$, изводи функције y по x вишег реда могу се изразити преко y, z и извода $z', z'', \ldots$ по y. Заиста,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = z \cdot \frac{dz}{dy} = zz', \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(zz')}{dx} = z \cdot \frac{d(zz')}{dy} = z \cdot (zz')' = z(zz'' + z'^2), \quad \text{итд.}$$

Овако се полазна једначина по y претвара у једначину по z, али за један мањег реда.

Вежбе ради, нађите $y^{(4)}$ и $y^{(5)}$. Има ли неке законитости?

Пример 1.6. Решити једначину $y'' = y'(1 - 2y)$.

Решење. Сменом $y' = z(y)$ дата једначина постаје

$$zz' = z(1 - 2y),$$

што је једначина са раздвојеним променљивим: $dz = (1 - 2y)dy$. Интеграција даје $y' = z = y - y^2 + C$, тј. $dx = \frac{dy}{y - y^2 + C}$. Поновном интеграцијом добијамо

$$x = \int \frac{dy}{y - y^2 + C} = -\frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{2y - 1}{2C_1} + D, \quad \text{где је} \quad C_1 = \sqrt{-C - \frac{1}{4}}.$$

Коначно, $y = \frac{1}{2} - C_1 \operatorname{tg}(C_1 x + C_2)$, где је $C_2 = C_1 D$.

1.4. Задаци

1. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = C_1 x + C_2 e^x$.
2. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x$.
3. Наћи диференцијалну једначину чије је опште решење $y = \frac{x + C_1}{x + C_2}$.
4. Решити диференцијалну једначину $(x + 1)y'' = \frac{y' + 1}{x}$.
5. Наћи опште решење диференцијалне једначине $e^{y''} = x + y''$.
6. Решити диференцијалну једначину $y'' e^y + y' = 0$.
7. Наћи решење једначине $y'' = y'(1 - y)$.
8. Наћи решење једначине $y^2 y'' = y'$ које задовољава почетне услове $y(0) = y'(0) = 1$.
9. Наћи оно решење једначине $e^{x+y} y'' = 1$ које задовољава услов $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

10. Решити диференцијалну једначину $y'' = (1+2\operatorname{tg}^2 x)y$ увођењем помоћне функције $z = y' - y\operatorname{tg} x$.

1.5. Решења

1. Ред једначине биће 2. При томе је $y' = C_1 + C_2e^x$ и $y'' = C_2e^x$. Одмах имамо $C_1 = y' - y''$ и $C_2 = e^{-x}y''$. Уврштивањем у једначину за y добијамо $y = (y' - y'')x + y''$, тј.

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

2. Функција $z = \frac{y}{x} = C_1\cos x + C_2\sin x$ задовољава диференцијалну једначину $z'' + z = 0$.

   Вратимо y: имамо $z' = (\frac{y}{x})' = \frac{xy'-y}{x^2}$ и $z'' = (\frac{xy'-y}{x^2})' = \frac{x^2y''-2xy'+2y}{x^3}$. Тако једначина $z'' + z = 0$ постаје

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0.$$

3. Тражена једначина имаће ред 2, па зато налазимо $y' = -\frac{C_1-C_2}{(x+C_2)^2}$ и $y'' = \frac{2(C_1-C_2)}{(x+C_2)^3}$. Дељењем ове две једнакости елиминишемо C_2:

$$x + C_2 = -\frac{2y'}{y''} \quad \text{и одатле} \quad C_1 - C_2 = -(x+C_2)^2y' = -\frac{4y'^3}{y''^2}.$$

   Сада убацивање у прву једнакост даје $y = 1 + \frac{C_1-C_2}{x+C_2} = 1 + \frac{2y'^2}{y''}$, тј. $(y-1)y'' = 2y'^2$.

4. Уведимо смену $z = y'$ и $z' = y''$. Остаје линеарна једначина $(x+1)z' = \frac{z+1}{x}$, што је једначина са раздвојеним променљивим: $\frac{dz}{z+1} = \frac{dx}{x(x+1)}$. Интеграција даје $\ln|z+1| = \ln|\frac{x}{x+1}| + \text{const}$, тј. $z+1 = \frac{C_1x}{x+1}$. Дакле, $y' = \frac{C_1x}{x+1} - 1$, што треба још једном интегралити:

$$y = C_1\big(x - \ln(x+1)\big) - x + C_2.$$

5. Уводимо параметар $t = y''$, чиме је $x = e^t - t$. Тада је $dx = (e^t-1)dt$, а y налазимо интеграцијом y'' двапут по dx:

$$y' = \int y''dx = \int t(e^t-1)dt = (t-1)e^t - \frac{1}{2}t^2 + A,$$

$$y = \int y'dx = \int \big((t-1)e^t - \tfrac{1}{2}t^2 + A\big)(e^t-1)dt = \frac{2t-3}{4}e^{2t} - \frac{t^2-2}{2}e^t + \frac{t^3}{6} + A(e^t-t) + B.$$

6. Сменом $y' = z(y)$ и $y'' = z(y)z'(y)$ добијамо $zz'e^y + z = 0$, тј. $z'(y) = -e^{-y}$. Следи

$$z = \textstyle\int z'dy = e^{-y} + C_1, \quad \text{тј.} \quad \frac{dy}{dx} = y' = e^{-y} + C_1,$$

   што је једначина са раздвојеним променљивим: $dx = dy/(e^{-y} + C_1)$. Интеграција даје

$$x = \frac{1}{C_1}\ln(1 + C_1e^y) + C,$$

   што се може еквивалентно записати као $y = \ln\frac{e^{C_1x+C_2}-1}{C_1}$, где је $C_2 = -CC_1$.

7. Сменом $y' = z(y)$ и $y'' = z(y)z'(y)$ добијамо $z' = 1 - y$, те је $z = \int(1-y)dy = C + y - \frac{1}{2}y^2$, тј. $y' = C + y - \frac{1}{2}y^2$. У добијеној једначини можемо раздвојити променљиве:

$$dx = \frac{2dy}{C_0 - (y-1)^2}, \quad \text{где је} \quad C_0 = 2C + 1.$$

   Даља интеграција зависи од знака константе C_0:

   - Ако је $C_0 < 0$, тј. $C_0 = -C_1^2$, добијамо $x = -\frac{2}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y-1}{C_1} + C_2$, тј. $y = 1 + C_1\operatorname{tg}\frac{C_1(C_2-x)}{2}$.
   - Ако је $C_0 > 0$, тј. $C_0 = C_1^2$, добијамо $x = \frac{1}{2C_1}\ln\frac{C_1+y}{C_1-y}$, тј. $y = C_1\big(1 - \frac{2}{e^{2C_1x}+1}\big) + C_2$.
   - Ако је $C_0 = 0$, добијамо $x = \frac{2}{y-1} + C_2$, тј. $y = 1 + \frac{2}{x-C_2}$.

8. Сменом $y' = z(y)$ и $y'' = z(y)z'(y)$ добијамо $y^2 zz' = z$, тј. $z' = 1/y^2$, што интеграцијом даје $\frac{dy}{dx} = z = C_1 - \frac{1}{y}$. Заменом почетних услова $y(0) = y'(0) = 1$ добијамо $C_1 = 2$, па је заправо

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{y}, \quad \text{што се своди на} \quad dx = \frac{dy}{2 - \frac{1}{y}} = \frac{y\,dy}{2y-1}.$$

Интеграцијом следи $2x + C_2 = y + \ln|2y-1|$, а заменом почетног услова $(x, y) = (0, 1)$ коначно налазимо $C_2 = 1$, тј. $2x + 1 = y + \ln|2y-1|$.

9. Сменом $u = x + y$ и $u'' = y''$ једначина постаје аутономна: $u'' = e^{-u}$. Уводимо функцију z: $u' = z(u)$. Тада је $u'' = z(u)z'(u) = e^{-u}$, што интеграцијом даје $z^2 = C_1 - 2e^{-u}$, тј. $\frac{du}{dx} = u' = \pm\sqrt{C_1 - 2e^{-u}}$. Овде су раздвојене променљиве: $dx = \pm du/\sqrt{C_1 - 2e^{-u}}$. Интеграција даје

$$\pm x = \frac{2}{\sqrt{C_1}} \ln(\sqrt{C_1 e^u} + \sqrt{C_1 e^u - 2}) + \text{const}.$$

Решавањем по u добијамо опште решење: $u = 2\ln\frac{\operatorname{ch}(C+Dx)}{D\sqrt{2}}$ за неке константе C и D.

Најзад, асимптотски је $u \sim 2(C+Dx-\ln(D\sqrt{2}))$ када $x \to +\infty$, а треба нам $u = x+y \sim x$, па следи $D = \frac{1}{2}$ и $C = \ln(D\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\ln 2$. Након сређивања коначно добијамо $y = 2\ln\left(e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2}\right) - x$.

10. Како је $(\operatorname{tg} x)' = \cos^{-2} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, имамо $z' = y'' - y' \operatorname{tg} x - y(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. Сада је

$$z' + z \operatorname{tg} x = y'' - (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)y = 0,$$

што је једначина са раздвојеним променљивим по z: $dz/z = -\operatorname{tg} x\, dx$. Интеграцијом следи $\ln|z| = \ln|\cos x| + \text{const}$, тј. $z = C_1 \cos x$.

Остаје да решимо једначину по y: $y' - y\operatorname{tg} x = z = C_1 \cos x$. То је линеарна једначина и њено решење је $y = A(\sin x + \frac{x}{\cos x}) + \frac{B}{\cos x}$, где су $A = \frac{1}{2}C_1$ и B произвољне константе.