Математика 3

Душан Ђукић

2. Линеарне диференцијалне једначине

2.1. Општа линеарна једначина

Линеарне диференцијалне једначине су једначине облика

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{1}$$

где су коефицијенти $a_1, \dots, a_n$ и b функције по x. Она је *хомогена* ако је $b(x) \equiv 0$, тј.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{2}$$

Приметимо да је функционал L линеаран, тј. $L(C_1y_1 + \cdots + C_ky_k) = C_1L(y_1) + \cdots + C_kL(y_k)$. Према томе, ако су функције $y_1, \dots, y_k$ решење хомогене једначине (2), онда је то и функција $y = C_1y_1 + \cdots + C_ky_k$, за ма које константе $C_1, \dots, C_k$.

Ако је y_p једно решење нехомогене једначине (1), онда је $L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = b(x) - b(x) = 0$. Другим речима, $y - y_p$ је решење одговарајуће хомогене једначине (2).

- Опште решење једначине (2) реда n има облик

  $$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

  где $y_1, y_2, \dots, y_n$ представљају n линеарно независних решења. За ових n решења кажемо да чине *фундаментални систем решења.*

- Опште решење једначине (1) има облик

  $$y = y_p + y_h, \tag{3}$$

  где је y_p једно (тзв. *партикуларно*) решење те једначине, а $y = y_h = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ *опште хомогено* решење - тј. опште решење одговарајуће хомогене једначине (2)

Константе $C_1, \dots, C_n$ су произвољне. Оне се могу одредити почетним (понекад названим „Кошијевим[2]") условима, тј. када су задате вредности функције и/или њених извода у неким тачкама.

Пример 2.1. Решити диференцијалну једначину $y'' - 3y' + 2y = 1$.

Решење. Одмах видимо да је једно партикуларно решење $y_p = \frac{1}{2}$.

Хомогена решења потражићемо у облику $y = e^{\lambda x}$. Тада је $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, те је

$$y'' - 3y' + 2y = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda x},$$

што је нула ако и само ако је $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$. Дакле, $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ су хомогена решења.

Уверимо се да су ова два хомогена решења линеарно независна: њихова детерминанта Вронског је

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \not\equiv 0.$$

Дакле, $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Према томе, опште решење дате једначине је $y = y_p + y_h = \frac{1}{2} + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

---

[2] *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857), француски математичар

2.2. Линеарна једначина са једним познатим решењем

Опште решење хомогене једначине (2) одређено је са n линеарно независних решења. Претпоставимо да нам је познато само једно решење, нпр. y_1. Увођењем смене $y = y_1 z$ дата једначина се своди на једначину по новој функцији z, реда мањег за 1.

Пример 2.2. Решити једначину $y'' - 2y' + y = 0$.

Решење. Као у претходном примеру, потражимо решење у облику $y = e^{\lambda x}$. Добићемо $y'' - 2y' + y = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{\lambda x}$, што је нула само за $\lambda = 1$. Дакле, једно решење је $y_1 = e^x$, а које је друго?

Уводимо смену $y = e^x z$. Како је

$$y' = e^x(z' + z) \quad \text{и} \quad y'' = e^x(z'' + 2z' + z),$$

имамо $0 = y'' - 2y' + y = e^x z''$, одакле је $z'' = 0$.

Следи да је $z = C_1 + C_2 x$ и, коначно, $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, што је опште решење дате једначине.

(Одговор на питање „а које је друго?” могао би да буде $y_2 = xe^x$.)

Претпоставимо да имамо општу хомогену линеарну једначину другог реда

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

чије нам је једно решење y_1 познато. Заменом

$$y = y_1 z, \quad y' = y_1 z' + y_1' z \quad \text{и} \quad y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$$

добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z + p(x)(y_1 z' + y_1' z) + q(x) y_1 z \\ &= y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' + \cancel{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)z} = y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' \end{aligned}$$

(приметимо да је $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ јер је y_1 решење), што је једначина првог реда по функцији $u = z'$. Њено решење је $u = C_2 e^{-\int p\,dx}/y_1^2$, одакле налазимо $z = \int u dx$. Добијамо опште решење у облику

$$y = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} dx \right).$$

Ово се понекад назива *Лиувиловом*[3] *формулом*.

2.3. Хомогена линеарна једначина са константним коефицијентима

Дата је диференцијална једначина

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{4}$$

Испитајмо за које λ је функција $y = e^{\lambda x}$ решење ове једначине. Како је $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, имамо $L(y) = P(\lambda)e^{\lambda x}$, где је

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{5}$$

карактеристични полином једначине (4). Дакле, $y = e^{\lambda x}$ је решење ове једначине ако и само ако је λ нула полинома (5).

Штавише, ако је λ нула полинома (5) са вишеструкошћу r (тј. $(x - \lambda)^r$ дели полином $P(x)$), онда су

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x}$$

решења једначине (4).

Ово остаје на снази и ако су $\lambda = a \pm bi$ комплексни корени карактеристичног полинома (они увек долазе у пару). Међутим, у том случају је

$$y = e^{\lambda x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$$

комплексно решење једначине (4), па зато уместо њих можемо узети

$$y_1 = \mathrm{Re}\, y = e^{ax}\cos bx \quad \text{и} \quad y_2 = \pm \mathrm{Im}\, y = e^{ax}\sin bx$$

као реална решења.

---

[3] *Joseph Liouville* (1809-1882), француски математичар

Пример 2.3. Решити једначине:

(а) $y''' - 7y' + 6y = 0$,
(б) $y^{(4)} - y'' - 2y' + 2y = 0$,
(в) $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$.

Решење. (а) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$. Дакле, фундаментални систем решења чине функције $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$ и $y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^{-3x}$, а опште решење је $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$.

(б) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$, а његове нуле су $\lambda = -1 \pm i$ и двострука $\lambda = 1$.

- Двострукој нули $\lambda = 1$ одговарају решења $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$, тј. e^x и xe^x.
- Пару комплексних нула $\lambda = -1 \pm i$ (што је $a \pm bi$ за $a = -1$ и $b = 1$) одговарају решења $e^{-x}\cos x$ и $e^{-x}\sin x$.

Опште решење је $y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.

(в) Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2+1)^2$, а његове нуле су $\lambda = 0$ са вишеструкошћу 3 и $\lambda = \pm i$ са вишеструкостима 2.

- Трострукој нули $\lambda = 0$ одговарају решења $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}$, тј. $1, x, x^2$.
- Двоструким комплексним нулама $\lambda = \pm i$ (што је $a \pm bi$ за $a = 0$ и $b = 1$) одговарају решења $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x \sin x$.

Опште решење је $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)\cos x + (C_6 + C_7 x)\sin x$.

2.4. Метод неодређених коефицијената

Претпоставимо да нам је дата нехомогена линеарна једначина са константим коефицијентима

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x). \tag{6}$$

С обзиром на (3), успешно решавање овакве једначине захтева налажење општег хомогеног решења, које сада умемо да нађемо, као и једног партикуларног решења. У неким специјалним случајевима облик партикуларног решења се може погодити. Један такав случај је када је $b(x)$ збир неколико функција облика $x^k e^{ax}\cos bx$ или $x^k e^{ax}\sin bx$.

- Нека је у једначини (6) функција $b(x)$ облика

$$e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\big),$$

где су P_1 и P_2 полиноми степена не већег од k. Тада се партикуларно решење једначине може наћи у облику

$$y = x^s e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\big),$$

где су Q_1 и Q_2 такође полиноми степена не већег од k, а s је вишеструкост корена $\alpha + \beta i$ у карактеристичном полиному једначине.

Пример 2.4. Решити једначине:

(а) $y'' - 4y' + 3y = (x-1)e^{2x}$,
(б) $y'' + y = \cos x$.

Решење. (а) Карактеристични полином је $T(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, па је хомогено решење једначине

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Даље, $\alpha = 2$, $\beta = 0$ и $P_1(x) = x - 1$ (нема полинома P_2), одакле је $k = \deg P_1 = 1$. Најзад, $\alpha + \beta i$ није нула карактеристичног полинома (тј. то „је” нула вишеструкости 0), те је $s = 0$. Према томе, партикуларно решење тражимо у облику

$$y_p = x^{\overset{1}{\cancel{0}}} e^{2x}\big(Q_1(x)\overset{1}{\cancel{\cos 0x}} + \cancel{Q_2(x)\sin 0x}\big) = Q_1(x)e^{2x},$$

где је $Q_1(x) = A + Bx$ полином степена највише $k = 1$.

Остаје да одредимо A и B. Како је

$$y_p = (Bx + A)e^{2x}, \quad y_p' = (2Bx + 2A + B)e^{2x}, \quad y_p'' = 4(Bx + A + B)e^{2x},$$

имамо $(x-1)e^{2x} = y_p'' - 4y_p' + 3y_p = (-Bx - A)e^{2x}$, одакле је $B = -1$, $A = 1$ и $y_p = (1-x)e^{2x}$.

Опште решење је
$$y = y_p + y_h = (1-x)e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

(б) Карактеристични полином је $T(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$, а хомогено решење
$$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

У овом случају је $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 1$ и $P_2(x) = 0$, те је $k = 0$, што значи да су $Q_1(x) = A$ и $Q_2(x) = B$ константе. Како је $\alpha + \beta i = i$ једнострука нула полинома $T(x)$, имамо $s = 1$. Зато партикуларно решење тражимо у облику
$$y_p = x(A\cos x + B\sin x) \quad\Rightarrow\quad y_p' = (A+Bx)\cos x + (B-Ax)\sin x,\quad y_p'' = (2B-Ax)\cos x - (2A+Bx)\sin x.$$

Најзад, $\cos x = y_p'' + y_p = 2B\cos x - 2A\sin x$, одакле је $B = \frac{1}{2}$ и $A = 0$, тј. $y_p = \frac{1}{2}x\sin x$.

Опште решење је
$$y = y_p + y_h = C_1\cos x + (\tfrac{1}{2}x + C_2)\sin x.$$

Пример 2.5. Решити једначину $y''' - 3y' + 2y = e^x + e^{-2x} + e^{3x}$.

Решење. Хомогено решење је $y_h = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{-2x}$.

У овом случају y_p је збир три партикуларна решења:

- y_{p_1} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^x$,
- y_{p_2} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^{-2x}$,
- y_{p_3} - партикуларно решење једначине $y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

Даље поступамо на већ описан начин. Ова три партикуларна решења имају облике $y_{p_1} = Ax^2e^x$, $y_{p_2} = Bxe^{-2x}$ и $y_{p_3} = Ce^{3x}$. Налазимо $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{9}$ и $C = \frac{1}{20}$.

Опште решење је $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_h = \frac{1}{6}x^2e^x + \frac{1}{9}xe^{-2x} + \frac{1}{20}e^{3x}$.

2.5. Метод варијације константе

Овај метод, приписан Лагранжу[4], јачи је од метода неодређених коефицијената, јер не захтева специјалан облик десне стране у (6):
$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = b(x).$$

Штавише, он може да се користи и ако коефицијенти $a_1, \ldots, a_n$ нису константни - под условом да смо у стању да нађемо опште хомогено решење. Међутим, рачун је често пипавији.

Обрадићемо случај $n = 2$. Другим речима, дата нам је једначина другог реда
$$y'' + a_1y' + a_0y = b(x).$$

чије нам је опште хомогено решење $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$ познато. Тада и опште решење дате једначине може да се запише у оваквом облику, али C_1 и C_2 неће нужно бити константе:
$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Сада су C_1 и C_2 *непознате функције*. Наравно, таквих парова (C_1, C_2) има много, али ми имамо право да им наметнемо додатни услов тако да изводи y' и y'' буду што једноставнији:
$$\begin{aligned} y' &= C_1y_1' + C_2y_2' & \boxed{\cancel{+C_1'y_1 + C_2'y_2}} &\longleftarrow \text{намећемо услов да је ово нула}\\ y'' &= C_1y_1'' + C_2y_2'' & \boxed{+C_1'y_1' + C_2'y_2'} &\longleftarrow \text{колико треба да буде ово?}\end{aligned}$$

Овако ће полазна једначина бити значајно упрошћена:
$$b(x) = y'' + a_1y' + a_0y = C_1\cdot\cancel{(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1)} + C_2\cdot\cancel{(y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2)} + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

Све у свему, функције C_1 и C_2 задовољавају систем једначина
$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0\\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = b(x).\end{cases}$$

[4] *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813), италијанско-француски математичар

Детерминанта овог система је $W = W[y_1, y_2] = \left|\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{smallmatrix}\right|$ - препознајемо детерминанту Вронског, а она није нула. Тако систем можемо решити нпр. применом Крамеровог правила:

$$C_1' = -\frac{y_2 \cdot b(x)}{W}, \quad C_2' = \frac{y_1 \cdot b(x)}{W} \quad \text{и према томе} \quad y = y_2 \int \frac{y_1 \cdot b(x)}{W}\, dx - y_1 \int \frac{y_2 \cdot b(x)}{W}\, dx. \tag{7}$$

У следећем задатку метод неодређених коефицијената није употребљив, па је метод варијације константе природан избор.

Пример 2.6. Решити једначину $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решење. Опште хомогено решење је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Зато решење дате једначине тражимо у облику $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Функције C_1 и C_2 налазимо решавањем система по C_1' и C_2':

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Добијамо $C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ и $C_2'(x) = \sin x$. Интеграцијом следи $C_1(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + A$ и $C_2(x) = -\cos x + B$, где су A и B произвољне константе. Опште решење дате једначине је

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right|\cos x + A\cos x + B\sin x.$$

По аналогији, ако нам је дата једначина

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = b(x),$$

реда n чије је хомогено решење $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, опште решење имаће облик

$$C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n,$$

где функције $C_1, \ldots, C_n$ налазимо решавањем система једначина по изводима $C_1', \ldots, C_n'$:

$$\begin{cases} C_1'y_1 & +C_2'y_2 & + \cdots + C_n'y_n & = & 0, \\ C_1'y_1' & +C_2'y_2' & + \cdots + C_n'y_n' & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots & & & & \\ C_1'y_1^{(n-2)} & +C_2'y_2^{(n-2)} & + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} & +C_2'y_2^{(n-1)} & + \cdots + C_n'y_n^{(n-1)} & = & b(x). \end{cases}$$

2.6. Ојлерова[5] једначина

То је једначина облика

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = b(x), \tag{8}$$

где су $a_1, \ldots, a_n$ константе. Сменом $x = e^t$ и $y(x) = y(e^t) = z(t)$ ова једначина се своди на линеарну са константним коефицијентима. Наиме, важи $dx = e^t dt$, те је

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}z', \quad y'' = \frac{d(y')}{dx} = e^{-t}\frac{d(y')}{dt} = e^{-2t}(z'' - z'), \quad \text{итд},$$

где $z', z'', \ldots$ представљају изводе по новој промењивој t. Тако добијамо

$$y = z, \quad xy' = z', \quad x^2y'' = z'' - z', \quad x^3y''' = z''' - 3z'' + 2z', \quad \ldots, \tag{9}$$

и уопште, $x^n y^{(n)} = P_n(\frac{d}{dt})z$, где је $P_n(\xi) = \xi(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-n+1)$. Једначина (8) се претвара у линеарну једначину по z са константним коефицијентима, а њен карактеристични полином биће

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda{-}1)\cdots(\lambda{-}n{+}1) + \cdots + a_3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0.$$

Пример 2.7. Решити једначину $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Решење. Сменом $x = e^t$ и $y(x) = y(e^t) = z(t)$ сводимо једначину на $(z'' - z') + z' + z = 0$, тј. $z'' + z = 0$. Њено опште решење је $z = C_1\cos t + C_2 \sin t$, али $t = \ln x$, дакле

$$y = C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x.$$

[5] *Leonhard Euler* (1707-1783), швајцарски математичар

Пример 2.8. Решити једначину $(2x+1)^2y''+y=\sqrt{4x+2}$.

Решење. И ово је Ојлерова једначина. Заиста, записујемо је у облику

$$4(x+\tfrac{1}{2})^2y''+y=2\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}.$$

и користимо смену $x+\frac{1}{2}=e^t$ и $y(x)=z(t)$. Формуле (9) сада гласе $(x+\frac{1}{2})y'=z'$ и $(x+\frac{1}{2})^2y''=z''-z'$. Једначина постаје $4z''-4z'+z=2e^{t/2}$.

Опште решење последње једначине је $z=(\frac{1}{4}t^2+C_1t+C_2)e^{t/2}$, што с обзиром на $t=\ln(x+\frac{1}{2})$ најзад даје

$$y=\left(\tfrac{1}{4}\ln^2(x+\tfrac{1}{2})+C_1\ln(x+\tfrac{1}{2})+C_2\right)\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}.$$

2.7. Задаци

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y^{(6)}=y''$.
2. Решити диференцијалну једначину $y''+y'-6y=e^x$, а затим наћи оно решење које задовољава услове $y(0)=y'(0)=1$.
3. Наћи решење диференцијалне једначине $2y''-3y'+y=e^{x-1}$ које задовољава услове $y(1)=y'(1)=1$.
4. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y''+9y=\sin x\sin 2x$ које задовољава услове $y(0)=1$ и $y'(0)=0$.
5. Решити једначину $y'''-2y''+y'-2y=e^x+\cos x$.
6. Наћи опште решење једначине $y''-4y=\frac{4}{e^x+1}$.
7. Решити диференцијалну једначину $y''-y'-2y=\ln(e^{-x}+1)$.
8. Решити једначину $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=\frac{x^3}{\sin 2x}$. (Хомогено решење је $y_h=C_1x\cos x+C_2x\sin x$.)
9. Наћи опште решење диференцијалне једначине $x^2y''+xy'-y=x$
10. Решити диференцијалну једначину $x^3y'''+2xy'-2y=x$.
11. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x-1)y''-2xy'+4y=x-1$. Да ли је $y=8^{\lambda x}$ решење одговарајуће хомогене једначине за неко λ?
12. Једно хомогено решење једначине $(x^2-2)y''-2xy'-x^2y=x^3+2x$ има облик $(ax+1)e^x$, где је a нека константа. Наћи њено опште решење.
13. Решити диференцијалну једначину $y''-2y'\operatorname{tg}x-2y=1$. Није забрањено користити смену $z=y\cos x$.
14. Наћи решење једначине $2y'^2-yy''=y^2(xy-1)$ уз услов $y(0)=y'(0)=1$. Пролази ли смена $y=1/z$?
15. Решити диференцијалну једначину $y''+y'^2+2xy'^3=e^{2y}y'^3$ уз почетне услове $y(0)=0$, $y'(0)=-1$. Није забрањено користити смену $x=x(y)$.
16. Решити диференцијалну једначину $2xy''+y'+y=x$ коришћењем смене $z(x)=y(x^2)$.
17. Наћи опште решење једначине $(\frac{1}{4}+e^{-2x})y''+y'+y=0$ ако је познато да оно има облик $y(x)=(C_1+C_2x)y_0(x)$, где је $y_0(x)$ једно партикуларно решење, а C_1 и C_2 произвољне константе.

2.8. Решења

1. Карактеристични полином је $T(\lambda)=\lambda^6-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$. Његовим нулама 0 (двострука), 1, -1 и $\pm i$ редом одговарају решења $y=C_1+C_2x$, $y=C_3e^x$, $y=C_4e^{-x}$ и $y=C_5\cos x+C_6\sin x$. Према томе, опште решење је $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x$.

2. Карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, па је хомогено решење дате једначине $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.

   Партикуларно решење тражимо једноставно као $y_p = Ae^x$ и налазимо $A = -\frac{1}{4}$, тако да је опште решење
$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{4}e^x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

   Почетни услови дају $y(0) = -\frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 1$ и $y'(0) = -\frac{1}{4} + 2C_1 - 3C_2 = 1$, одакле лако налазимо $C_1 = 1$ и $C_2 = \frac{1}{4}$. Тражено решење је $y = -\frac{1}{4}e^x + e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$.

3. Карактеристични полином је $T(\lambda) = 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$, па је хомогено решење дате једначине $y = C_1 e^x + C_2 e^{x/2}$.

   Десна страна дате једначине је $\frac{1}{e}e^x$, па партикуларно решење тражимо у облику $y_p = Axe^x$. Убацивањем $y' = A(x+1)e^x$ и $y'' = A(x+2)e^x$ добијамо $A = \frac{1}{e}$, тј. $y_p = \frac{x}{e}e^x$. Дакле, опште решење је
$$y = y_p + y_h = \big(\tfrac{x}{e} + C_1\big)e^x + C_2 e^{x/2}.$$

   Сада из почетних услова имамо $y(1) = (1 + C_1 e) + C_2 e^{1/2} = 1$ и $y'(1) = (2 + C_1 e) + \frac{1}{2}C_2 e^{1/2} = 1$, одакле добијамо $C_1 = -\frac{2}{e}$ и $C_2 = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

   Према томе, коначно решење је $y = (x-2)e^{x-1} + 2e^{\frac{x-1}{2}}$.

4. Карактеристични полином дате једначине је $T(\lambda) = \lambda^2 + 9$ са нулама $\pm 3i$, па је хомогено решење $y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. Како је десна страна једначине $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$, партикуларно решење делимо на два дела: y_{p_1} за једначину $y'' + 9y = \frac{1}{2}\cos x$ и y_{p_2} за једначину $y'' + 9y = -\frac{1}{2}\cos 3x$.

   Решење y_{p_1} тражимо у облику $y_{p_1} = A_1 \cos x + A_2 \sin x$ и налазимо $A_1 = \frac{1}{16}$ и $A_2 = 0$

   Решење y_{p_2} тражимо у облику $y_{p_2} = B_1 x \cos 3x + B_2 x \sin 3x$ и налазимо $B_1 = 0$ и $B_2 = -\frac{1}{12}$.

   Према томе, опште решење је
$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_h = C_1 \cos 3x + \big(-\tfrac{1}{12}x + C_2\big)\sin 3x + \tfrac{1}{16}\cos x.$$

   Најзад, из $y(0) = C_1 + \frac{1}{16} = 1$ и $y'(0) = 3C_2 = 0$ добијамо $C_1 = \frac{15}{16}$, $C_2 = 0$ и
$$y = \frac{15}{16}\cos 3x - \frac{1}{12}x \sin 3x + \frac{1}{16}\cos x.$$

5. Карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$ и његове нуле су 2 и $\pm i$, па је хомогено решење
$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

   Два хомогена решења тражимо у облицима $y_{p_1} = Ae^x$ (за e^x) и $y_{p_2} = Bx\cos x + Cx \sin x$ (за $\cos x$) и налазимо $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{10}$ и $C = -\frac{1}{5}$.

   Опште решење полазне једначине је
$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^{2x} + \big(C_2 - \tfrac{1}{10}x\big)\cos x + (C_3 - \tfrac{1}{5}x)\sin x - \tfrac{1}{2}e^x.$$

6. Функција на десној страни не допушта метод неодређених коефицијената. Користимо метод варијације константе. Хомогено решење ове једначине је $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$, па опште решење тражимо у облику
$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}.$$

   При томе су функције $C_1(x)$ и $C_2(x)$ везане условима $C_1' e^{2x} + C_2' e^{-2x} = 0$ и $2C_1' e^{2x} - 2C_2' e^{-2x} = \frac{4}{e^x + 1}$. Налазимо да је
$$C_1'(x) = \frac{1}{e^{2x}(e^x+1)} \quad \text{и} \quad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}$$

   Интеграцијом добијамо $C_1(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \ln(1 + e^{-x}) + A$ и $C_2(x) = \ln(1 + e^x) - e^x + B$. Према томе, опште решење полазне једначине је
$$y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x} = e^x - e^{-x} - \tfrac{1}{2} + e^{-2x}(B + \ln(1 + e^x)) - e^{2x}(A + \ln(1 + e^{-x})),$$

   где су A и B произвољне константе.

7. Хомогено решење је $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. Настављамо методом варијације константе: $y = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-x}$, где функције C_1 и C_2 задовољавају услове
$$C_1'e^{2x} + C_2'e^{-x} = 0 \quad \text{и} \quad 2C_1'e^{2x} - C_2'e^{-x} = \ln(e^{-x} + 1).$$
Добијамо $C_1' = \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^{-x} + 1)$ и $C_2' = -\frac{1}{3}e^{x}\ln(e^{-x} + 1)$. Интеграција са сменом $t = e^{-x}$ даје
$$C_1 = -\tfrac{1}{6}e^{-x} + \tfrac{1}{12}e^{-2x} + \tfrac{1}{6}(1 - e^{-2x})\ln(e^{-x} + 1) + A \quad \text{и} \quad C_2 = -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}(e^{x} + 1)\ln(e^{-x} + 1) + B$$
Сређивањем најзад добијамо
$$y = Ae^{2x} + \big(B - \tfrac{1}{3}x\big)e^{-x} - \tfrac{1}{6}e^{x} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{6}(e^{2x} - 2e^{-x} - 3)\ln(e^{-x} + 1)$$

8. Знајући хомогена решења $y_1 = x\cos x$ и $y_2 = x\sin x$, можемо да применимо формулу (7). Пошто је $b(x) = \frac{x^3}{2\sin x\cos x}$ и $W = x^2$, добијамо
$$y = x\sin x\int\frac{dx}{2\sin x} - x\cos x\int\frac{dx}{2\cos x} = x\sin x\Big(C_1 + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sin x}{1+\cos x}\Big|\Big) + x\cos x\Big(C_2 + \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\cos x}{1+\sin x}\Big|\Big).$$

9. Ово је Ојлерова једначина и решавамо је сменом $x = e^t$ и $y = z(t)$. Пошто је $xy' = z'$ и $x^2y'' = z'' - z'$, добијамо линеарну једначину с константним коефицијентима
$$z'' - z = e^t.$$
Карактеристични полином је $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, па је хомогено решење добијене једначине $z_h = C_1e^t + C_2e^{-t}$.
Партикуларно решење тражимо у облику $z_p = Ate^t$ и налазимо га за $A = \frac{1}{2}$. Следи да је $z = z_p + z_h = (\frac{1}{2}t + C_1)e^t + C_2e^{-t}$. Враћањем $t = \ln x$ добијамо $y = (\frac{1}{2}\ln x + C_1)x + \frac{C_2}{x}$.

10. На основу једначина (9) сменом $x = e^t$ и $y = z(t)$ дата једначина постаје
$$z''' - 3z'' + 4z' - 2z = e^t.$$
Карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2\lambda = (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, па је хомогено решење $z_h = e^t(C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t)$.
Партикуларно решење тражимо у облику $z_p = Ate^t$ и налазимо $A = 1$. Опште решење је
$$z = z_p + z_h = e^t(t + C_1 + C_2\cos t + C_3\sin t), \quad \text{тј.} \quad y = x(\ln x + C_1 + C_2\cos\ln x + C_3\sin\ln x).$$

11. Проверимо да ли је $y_1 = 8^{\lambda x}$ хомогено решење: имамо $y_1 = e^{\mu x}$, где је $\mu = \lambda\ln 8$, па је $y_1' = \mu e^{\mu x}$, $y_1'' = \mu^2e^{\mu x}$ и
$$(x-1)y_1'' - 2xy_1' + 4y_1 = \big(\mu^2(x-1) - 2\mu x + 4\big)e^{\mu x} = \big((\mu^2 - 2\mu)x - (\mu^2 - 4)\big)e^{\mu x},$$
а то је нула само када је $\mu^2 - 2\mu = \mu^2 - 4 = 0$, тј. за $\mu = 2$; тада је $\lambda = 2/\ln 8$ и $y_1 = e^{2x}$.
Сада Лиувилова формула даје друго хомогено решење: $y_2 = 2x^2 - 2x + 1$. Партикуларно решење тражимо у облику линеарног полинома и налазимо $y_p = \frac{2x-1}{4}$.
Опште решење је
$$y = \tfrac{2x-1}{4} + C_1e^{2x} + C_2(2x^2 - 2x + 1).$$

12. Испитајмо $y = (ax+1)e^x$: тада је
$$y' = (ax + a + 1)e^x, \quad y'' = (ax + 2a + 1)e^x \quad \text{и} \quad (x^2-2)y'' - 2xy' - x^2y = -2(2a+1)(x+1)e^x,$$
што је нула-функција ако је $a = -\frac{1}{2}$. Дакле, $y_1 = (-\frac{1}{2}x + 1)e^x = -\frac{1}{2}(x-2)e^x$ је хомогено решење.
Опште хомогено решење налазимо применом Лиувилове формуле: $y_h = C_1(x-2)e^x + C_2(x+2)e^{-x}$.
Испробавањем линеарних полинома $y = ax + b$ налазимо партикуларно решење $y_p = -x$. Опште решење је
$$y = y_p + y_h = -x + C_1(x-2)e^x + C_2(x+2)e^{-x}.$$

13. Користићемо оно што није забрањено: ако је $y = \frac{z}{\cos x}$, онда је
$$y' = \frac{z'\cos x + z\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{и одатле} \quad y'' = \frac{z''\cos^2 x + 2z'\cos x\sin x + z(2 - \cos^2 x)}{\cos^3 x}.$$
Тако једначина $y'' - 2y'\operatorname{tg} x - 2y = 1$ након сређивања постаје линеарна са константним коефицијентима: $z'' - z = \cos x$.
Партикуларно решење је $z_p = -\frac{1}{2}\cos x$, хомогено је $z_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$, па имамо $z = z_p + z_h$ и
$$y = \frac{z}{\cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{C_1e^x + C_2e^{-x}}{\cos x}.$$

14. Понуђена смена даје

$$y' = -z^{-2}z' \quad \text{и} \quad y'' = 2z^{-3}z'^2 - z^{-2}z''.$$

Заменом у дату једначину добијамо $\cancel{2z^{-4}z'^2} - \cancel{2z^{-4}z'^2} + z^{-3}z'' = z^{-2}(xz^{-1} - 1)$, што се након множења са z^3 претвара у $z'' + z = x$. Ову једначину лако решавамо: $z = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Почетни услови $y(0) = \frac{1}{z(0)} = 1$ и $y'(0) = -\frac{z'(0)}{z(0)^2} = 1$ дају $z(0) = C_1 = 1$ и $z'(0) = 1 + C_2 = -1$, па је $C_1 = 1$ и $C_2 = -2$. Најзад,

$$y = \frac{1}{x + \cos x - 2\sin x}.$$

15. Напишимо дату једначину као једначину по $x = x(y)$: како је

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x'} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(1/x')}{dx} = \frac{d(1/x')/dy}{dx/dy} = \frac{-x''/x'^2}{x'} = -\frac{x''}{x'^3},$$

дата једначина постаје

$$-\tfrac{x''}{x'^3} + \tfrac{1}{x'^2} + \tfrac{2x}{x'^3} = \tfrac{e^{2y}}{x'^3}, \quad \text{тј.} \quad x'' - x' - 2x = -e^{2y}.$$

Хомогено решење ове једначине је $x_h(y) = C_1 e^{2y} + C_2 e^{-y}$, а партикуларно има облик $x_p(y) = Aye^{2y}$. Лако налазимо $A = -\frac{1}{3}$, те је

$$x = x_p + x_h = (-\tfrac{1}{3}y + C_1)e^{2y} + C_2 e^{-y}.$$

Најзад, за $x = 0$ важи $y = 0$ и $y' = \frac{1}{x'} = 1$, одакле добијамо $x(0) = C_1 + C_2 = 0$ и $x'(0) = 2C_1 - \frac{1}{3} + C_2 = 1$. Следи $C_1 = \frac{4}{3}$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$, дакле $x = \frac{4-y}{3}e^{2y} - \frac{4}{3}e^{-y}$.

16. Ако је $z(x) = y(x^2)$, онда је

$$z'(x) = 2xy'(x^2) \quad \text{и} \quad z''(x) = 4x^2 y''(x^2) + 2y'(x^2).$$

Ако у једначини $2xy'' + y' + y = x$ заменимо x са x^2, добијамо $2x^2 y''(x^2) + y'(x^2) + y(x^2) = x^2$, тј. $\frac{1}{2}z''(x) + z(x) = x^2$. То је једначина са константним коефицијентима коју умемо да решимо: $z_h(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$ и $z_p(x) = x^2 - 1$, дакле

$$z(x) = x^2 - 1 + C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x).$$

Најзад, $y(x) = z(\sqrt{x}) = x - 1 + C_1 \cos\sqrt{2x} + C_2 \sin\sqrt{2x}$.

17. Означимо $P = \frac{1}{4} + e^{-2x}$. По услову, $y = y_0$ и $y = xy_0$ су решења диференцијалне једначине $Py'' + y' + y = 0$. Имамо $(xy_0)' = xy_0' + y_0$ и $(xy_0)'' = xy_0'' + 2y_0'$. Према томе,

$$Py_0'' + y_0' + y_0 = 0 \quad \text{и} \quad P(xy_0)'' + (xy_0)' + xy_0 = xPy_0'' + (2P + x)y_0' + (x+1)y_0 = 0.$$

Када од друге једначине одузмемо прву помножену са x, добијамо $2Py_0' + y_0 = 0$, што је обична једначина са раздвојеним промењљивим. Сада је $\frac{-2dy_0}{y_0} = \frac{dx}{P}$, а одатле интеграцијом

$$-2\ln|y_0| = \int \frac{dx}{\frac{1}{4} + e^{-2x}} = 2\ln(e^{2x} + 4) + \text{const}, \quad \text{па је} \quad y_0 = \frac{C}{e^{2x} + 4}.$$

Према томе, опште решење једначине из задатка је $y = \dfrac{C_1 + C_2 x}{e^{2x} + 4}$.