Математика 3

Душан Ђукић

3. Системи диференцијалних једначина

3.1. Метод елиминације

Овде се бавимо системима првог реда са n непознатих функција $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$:

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x), \\ y_2' = F_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ y_n' = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x), \end{cases}$$

где су $F_i(t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$ за $i = 1, \dots, n$ дате диференцијабилне функције по $n+1$ променљивих.

Један начин на који се може приступити решавању оваквих система је метод елиминације. Имамо

$$\begin{aligned} y_1'' &= \frac{d}{dx} F_1(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), x) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \cdot y_1' + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \cdot y_2' + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} \cdot y_n' + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial t_1} \cdot F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \cdot F_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial t_n} \cdot F_n + \frac{\partial F_1}{\partial t_{n+1}}, \end{aligned}$$

што је функција по вредностима x и $y_1(x), \dots, y_n(x)$. На исти начин, сви изводи вишег реда могу се представити у облику неких функција по вредностима x и $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Овако добијамо систем n једначина из којег се може елиминисати $n-1$ непознатих вредности $y_2(x), \dots, y_n(x)$, чиме остаје диференцијална једначина реда n по y_1.

Пример 3.1. Решити систем једначина $\begin{cases} y_1' = y_2 - x, \\ y_2' = 2y_1/x^2. \end{cases}$

Решење. Диференцирање прве једначине даје

$$y_1'' = y_2' - 1 = 2y_1/x^2 - 1, \quad \text{тј.} \quad x^2 y_1'' - 2y_1 = -x^2.$$

Ово је Ојлерова једначина по y_1 чије је опште решење $y_1 = -\frac{1}{3}x^2 \ln x + C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$.

Коначно, $y_2 = y_1' + x = -\frac{2}{3}x \ln x + (2C_1 - \frac{1}{3})x - \frac{C_2}{x^2}$.

3.2. Систем линеарних једначина са константним коефицијентима

Посматрајмо систем

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ \quad \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{10}$$

где су $y_1, \dots, y_n$ непознате функције по променљивој x, а a_{ij} константе. Овај систем се методом елиминације своди на линеарну једначину по y_1 реда (највише) n са константним коефицијентима.

Пример 3.2. Решити систем једначина по непознатим функцијама $x(t), y(t), z(t)$: $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 6z, \\ y' = x + 2y + 3z, \\ z' = y + 6z. \end{cases}$

Решење. Изразићемо прва три извода функције x преко вредности x, y, z:

$$\begin{aligned}
x' &= 3x + 2y + 6z,\\
x'' &= 3x' + 2y' + 6z' = 3(3x + 2y + 6z) + 2(x + 2y + 3z) + 6(y + 6z) = 11x + 16y + 60z,\\
x''' &= 11x' + 16y' + 60z' = 11(3x + 2y + 6z) + 16(x + 2y + 3z) + 60(y + 6z) = 49x + 114y + 474z.
\end{aligned}$$

Из прве једнакости елиминишемо $z = \frac{1}{6}(x' - 3x - 2y)$, чиме друге две једначине постају $x'' = 10x' - 19x - 4y$ и $x''' = 79x' - 188x - 44y$. Затим елиминишемо $y = \frac{1}{4}(-x'' + 10x' - 19x)$, чиме друга једначина даје линеарну по x:

$$x''' - 11x'' + 31x' - 21x = 0.$$

Њен карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 31\lambda - 21 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 7)$, па је опште решење

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + C_3 e^{7t}.$$

Сада налазимо

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{4}(-x'' + 10x' - 19x) = -\tfrac{5}{2} C_1 e^t + \tfrac{1}{2} C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2} C_3 e^{7t},\\
z &= \tfrac{1}{6}(x' - 3x - 2y) = \tfrac{1}{2} C_1 e^t - \tfrac{1}{6} C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2} C_3 e^{7t}.
\end{aligned}$$

Пример 3.3. Решити систем једначина по непознатим функцијама $x(t), y(t)$: $\begin{cases} x' = 2x + \ \ y + e^t,\\ y' = 2x + 3y + e^{-t}.\end{cases}$

Решење. Диференцирање прве једначине даје $x'' = 2x' + y' + e^t = 2(2x + y + e^t) + (2x + 3y + e^{-t}) + e^t = 6x + 5y + 3e^t + e^{-t}$. Елиминацијом $y = x' - 2x - e^t$ из прве једначине добијамо $x'' = 6x + 5(x' - 2x - e^t) + 3e^t + e^{-t} = 5x' - 4x - 2e^t + e^{-t}$, тј.

$$x'' - 5x' + 4x = e^{-t} - 2e^t.$$

Опште решење по x је $x = (\frac{2}{3}t + C_1)e^t + C_2 e^{4t} + \frac{1}{10}e^{-t}$.

Одавде налазимо $y = (-\frac{2}{3}t - C_1 - \frac{1}{3})e^t + 2C_2 e^{4t} - \frac{3}{10}e^{-t}$.

3.3. Метод сопствених вредности

Показаћемо укратко како се хомогени системи облика (10) решавају методом из линеарне алгебре. Мада је овај приступ елегантнији, компликује се у случају када карактеристични полином има вишеструке нуле. Тај случај ћемо овог пута прећутати.

Систем (10) се може записати у облику хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда по векторској функцији $\vec{r}$:

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r} + B, \qquad \text{где је} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}.$$

Хомоген систем има облик

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}. \tag{11}$$

Овде $\dot{\vec{r}}$ означава извод векторске функције $\vec{r}$. Такође, са $*^T$ ћемо означавати транспоновање.

Испитајмо за које λ постоји константни ненула вектор $\vec{v} = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T$ такав да је $\vec{r} = e^{\lambda t}\vec{v}$ решење система (11). Како је $\dot{\vec{r}} = \lambda e^{\lambda t}\vec{v}$, систем (11) се своди на $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = A e^{\lambda t}\vec{v}$, тј.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0. \tag{12}$$

Ова једначина по $\vec{v}$ има нетривијално решење ако и само ако је $\det(A - \lambda I) = 0$. За дату $n \times n$ матрицу A, израз

$$\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tI) = \det(tI - A)$$

је моничан полином степена n - *карактеристични полином* матрице A. У нашем случају λ мора да буде нула овог полинома - *сопствена вредност* матрице A. Вектор $\vec{v}$ се тада добија као нетривијално решење једначине (12) - он се назива *сопствени вектор* матрице A.

Размотрићемо само случај када матрица A има n различитих сопствених вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Свакој од вредности λ_i одговара по једно решење система (11): $\vec{r}_i = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$, где је v_i сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_i. Опште решење једначине (11) је тада линеарна комбинација решења $\vec{r}_i$:

$$\vec{r} = C_1\vec{r}_1 + C_2\vec{r}_2 + \cdots + C_n\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}\vec{v}_i.$$

Пример 3.4. Решити систем једначина по непознатим функцијама $x(t), y(t), z(t)$: $\begin{cases} x' = x + 2y + z, \\ y' = 2x + 3y + z, \\ z' = 4x + z. \end{cases}$

Решење. Дати систем се записује као

$$\dot{\vec{r}} = A\vec{r}, \quad \text{где је} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Карактеристични полином матрице A је $\chi_A(t) = -\det(A - tI) = t^3 - 5t^2 - t + 5 = (t-1)(t+1)(t-5)$, а сопствене вредности су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

Сопствени вектор $\vec{v}_1 = [a\ b\ c]^T$ који одговара вредности $\lambda_1 = 1$ је решење једначине $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$, тј. решење система

$$a + 2b + c = a, \quad 2a + 3b + c = b, \quad 4a + c = c$$

То решење је $(a, b, c) = (0, -1, 2)s$, па узимамо $\vec{v}_1 = [0\ -1\ 2]^T$.

Слично налазимо $\vec{v}_2 = [-1\ 0\ 2]^T$ и $\vec{v}_3 = [2\ 3\ 2]^T$. Према томе,

$$\vec{r}_1 = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1\vec{r}_1 + C_2\vec{r}_2 + C_3\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} C_2e^{-t} + 2C_3e^{5t} \\ -C_1e^t + 3C_3e^{5t} \\ 2C_1e^t + 2C_2e^{-t} + 2C_3e^{5t} \end{bmatrix}.$$

3.4. Систем једначина у симетричном облику

Систем диференцијалних једначина по непознатим функцијама $x_1(t), \dots, x_n(t)$

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = F_n,$$

где су $F_1, F_2, \dots, F_n$ дате функције по $x_1, \dots, x_n$, може се записати у *симетричном облику*:

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \dots = \frac{dx_n}{F_n} \quad (= dt). \tag{13}$$

При решавању оваквог система покушавамо да направимо линеарну комбинацију једнакости

$$dx_1 = F_1 dt, \quad \dots, \quad dx_n = F_n dt$$

чија је лева страна тотални диференцијал, а десна страна нула. Другим речима, тражимо погодне функције G и $G_1, \dots, G_n$ по $x_1, \dots, x_n$ тако да је

$$dG = G_1 dx_1 + G_2 dx_2 + \dots + G_n dx_n = (G_1F_1 + G_2F_2 + \dots + G_nF_n)dt = 0.$$

На тај начин добијамо везу између непознатих $x_1, \dots, x_n$, тзв. *први интеграл* система (13):

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}.$$

Да би систем (13) био потпуно решен, треба нам $n - 1$ независних веза овог типа.

Пример 3.5. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{y^2 - z^2} = \dfrac{dy}{z^2 - x^2} = \dfrac{dz}{x^2 - y^2}$.

Решење. Систем можемо да запишемо као

$$dx = (y^2 - z^2)dt, \quad dy = (z^2 - x^2)dt, \quad dz = (x^2 - y^2)dt.$$

Просто сабирање даје

$$d(x + y + z) = dx + dy + dz = \big((z^2 - x^2) + (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)\big)dt = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z = C_1.$$

Такође имамо

$$d(x^3 + y^3 + z^3) = x^2dx + y^2dy + z^2dz = \big(x^2(y^2 - z^2) + y^2(z^2 - x^2) + z^2(x^2 - y^2)\big)dt = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + y^3 + z^3 = C_2.$$

Тако смо добили имплицитно дату фамилију решења: $\begin{cases} x + y + z = C_1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = C_2. \end{cases}$

Понекад и параметар t има улогу, па решење буде у параметарском облику.

Пример 3.6. Решити систем $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{x}$.

Решење. Имамо $dx = y\,dt$, $dy = z\,dt$ и $dz = x\,dt$, тј.

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x.$$

Ово је систем линеарних једначина с константним коефицијентима, и то сасвим једноставан: одмах имамо једначину $x''' = x$ чије је опште решење

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t/2}\cos\tfrac{t\sqrt{3}}{2} + C_3e^{-t/2}\sin\tfrac{t\sqrt{3}}{2}.$$

Диференцирањем налазимо

$$y = x' = C_1e^t + \tfrac{C_3\sqrt{3}-C_2}{2}e^{-t/2}\cos\tfrac{t\sqrt{3}}{2} - \tfrac{C_3+C_2\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\sin\tfrac{t\sqrt{3}}{2};$$
$$z = y' = C_1e^t - \tfrac{C_3\sqrt{3}+C_2}{2}e^{-t/2}\cos\tfrac{t\sqrt{3}}{2} - \tfrac{C_3-C_2\sqrt{3}}{2}e^{-t/2}\sin\tfrac{t\sqrt{3}}{2}.$$

3.5. Задаци

1. Решити систем једначина $\begin{cases} y' = z - y, \\ z' = \frac{z}{y}(z-y), \end{cases}$ где су y, z непознате функције по x.

2. Решити систем једначина $\begin{cases} y' = (1-x)y - z, \\ z' = x^2y + (1+x)z, \end{cases}$ где су y, z непознате функције по x.

3. Решити систем једначина $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = 2x + 4y + z, \\ z' = 3x + 3y + 4z. \end{cases}$

4. Решити систем једначина $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 2z, \\ y' = 2x + 3y + 3z, \\ z' = x + y + z. \end{cases}$

5. Наћи опште решење $x(t), y(t)$ система $\begin{cases} x' = 3x - 2y + \cos t, \\ y' = 5x - 3y. \end{cases}$

6. Решити систем једначина $\begin{cases} x = y' - 2x' + e^t, \\ y = x' - 2y' - e^t. \end{cases}$ уз почетни услов $x(0) = y(0) = 0$.

7. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{2y}$.

8. Наћи опште решење система једначина $\dfrac{dx}{-y^2} = \dfrac{dy}{x^2-2xy} = \dfrac{dz}{y^2z}$.

9. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{2y+3z} = \dfrac{dy}{2x+2z} = \dfrac{dz}{3x}$.

10. Наћи систем у симетричном облику чије је опште решење $\begin{cases} x + y + z = C_1, \\ xy(x+y+2z) = C_2. \end{cases}$

11. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{7y^2-5z^2} = \dfrac{dy}{3z^2-7x^2} = \dfrac{dz}{5x^2-3y^2}$.

12. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{xz+1} = \dfrac{dz}{xy+1}$.

13. Решити систем једначина $\dfrac{dx}{x^3+xyz} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$.

14. Наћи решење система $\dfrac{dx}{x^2-yz} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{x^2-xy}$ које пролази кроз тачку $(x,y,z) = (1,1,4)$.

3.6. Решења

1. Елиминишимо z. Имамо

$$y'' = z' - y' = \frac{z}{y}(z-y) - (z-y) = \frac{(z-y)^2}{y} = \frac{y'^2}{y}, \quad \text{тј.} \quad yy'' = y'^2.$$

У добијеној једначини се не појављује x, па се она решава сменом $y' = u = u(y)$ и $y'' = uu'$. Добија се $y \cdot uu' = u^2$, тј. $\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$, што значи да је $\ln|u| - \ln|y| = \text{const}$, тј. $u = C_1 y$ за неку константу C_1. Дакле,

$$y' = C_1 y \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{C_1 x}.$$

2. Диференцирањем израза за y' добија се $y'' = (1-x)y' - z' - y = -2xy - 2z = -2y + 2y'$, тј.

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Карактеристични полином ове једначине је $T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ и има нуле $1 \pm i$, па је опште решење

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Сада имамо и

$$z = (1-x)y - y' = -e^x\big((C_1 x + C_2)\cos x + (C_2 x - C_1)\sin x\big).$$

3. Диференцирањем прве једначине добијамо

$$\begin{aligned} x'' &= x' - y' + z' = (x - y + z) - (2x + 4y + z) + (3x + 3y + 4z) = 2x - 2y + 4z, \\ x''' &= 2x' - 2y' + 4z' = 2(x - y + z) - 2(2x + 4y + z) + 4(3x + 3y + 4z) = 10x + 2y + 16z. \end{aligned}$$

Из полазне једначине је $z = x' - x + y$, па ове две једначине постају $x'' = 4x' - 2x + 2y$ и $x''' = 16x' - 6x + 18y$. Елиминацијом y следи $x''' - 9x'' + 20x' - 12x = 0$. Карактеристични полином је $T(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20\lambda - 12 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6)$, па је

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{6t}.$$

Одавде лако изражавамо преостале две непознате:

$$y = \tfrac{x'' - 4x' + 2x}{2} = -\tfrac{1}{2}C_1 e^t - C_2 e^{2t} + 7C_3 e^{6t}, \qquad z = x' - x + y = -\tfrac{1}{2}C_1 e^t + 12 C_3 e^{6t}.$$

4. Диференцирањем прве једначине добијамо

$$x'' = 3x' + 2y' + 2z' = 3(3x + 2y + 2z) + 2(2x + 3y + 3z) + 2(x + y + z) = 15x + 14y + 14z$$

и већ одавде можемо да направимо диференцијалну једначину по x: заменом $z = \frac{1}{2}(x' - 3x - 2y)$ следи

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

с карактеристичним полиномом $T(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$, те је $x = C_1 e^t + C_2 e^{6t}$.

Међутим, y не можемо да изразимо директно, већ само диференцијалном једначином: $y' = 2x + 3y + 3z = 2x + 3y + \frac{3}{2}(x' - 3x - 2y) = \frac{1}{2}(3x' - 5x) = -C_1 e^t + \frac{13}{2} C_2 e^{6t}$, одакле је

$$y = \textstyle\int y' dx = -C_1 e^t + \frac{13}{12} C_2 e^{6t} + C_3 \quad \text{и најзад} \quad z = \frac{1}{2}(x' - 3x - 2y) = \frac{5}{12} C_2 e^{6t} - C_3.$$

5. Имамо $x'' = 3x' - 2y' - \sin t = 3(3x - 2y + \cos t) - 2(5x - 3y) - \sin t = -x + 3\cos t - \sin t$, тј.

$$x'' + x = 3\cos t - \sin t.$$

Хомогено решење ове једначине је $x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а партикуларно има облик $x_p = t(A\cos t + B \sin t)$. Пошто је тада $x_p'' + x_p = 2B\cos t - 2A \sin t$, следи да је $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ и

$$x = x_p + x_h = (\tfrac{1}{2}t + C_1)\cos t + (\tfrac{3}{2}t + C_2)\sin t.$$

Прва једначина система даје $y = \frac{1}{2}(3x - x' + \cos t) = \frac{6C_1 - 2C_2 + 1}{4}\cos t + (\frac{5}{2}t + \frac{6C_2 + 2C_1 - 3}{4})\sin t$.

6. За почетак, изразимо x' и y' преко x и y како смо навикли:

$$x' = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}e^t, \quad y' = -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}e^t.$$

Сада је $x'' = -\frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}e^t = \frac{5}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{2}{9}e^t$, па пошто је $y = -3x' - 2x + e^t$, следи

$$x'' + \tfrac{4}{3}x' + \tfrac{1}{3}x = \tfrac{2}{3}e^t.$$

Хомогено решење је $x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t/3}$, а партикуларно $x_p = \frac{1}{4}e^t$. Тако добијамо

$$x = \tfrac{1}{4}e^t + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t/3} \quad \text{и} \quad y = -3x' - 2x + e^t = -\tfrac{1}{4}e^t + C_1 e^{-t} - C_2 e^{-t/3}.$$

7. Из $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2y}$ следи $dz = 2dy$, тј.
$$z = 2y + A$$
за неку константу A. Заменом у једнакост $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{y}$ добијамо
$$\frac{dx}{x} = \frac{2y+A}{y}\,dy \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2y+A}{y}\,dy = (2y + A\ln|y|) + \mathrm{const.}$$
. Одавде је $x = By^A e^{2y}$ за неку константу B.

8. Из једнакости $\frac{dx}{-y^2} = \frac{dz}{y^2 z}$ следи $-dx = \frac{dz}{z}$, одакле је $-x = \ln|z| + \mathrm{const}$, тј.
$$z = C_1 e^{-x}.$$
Такође имамо хомогену једначину $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-x^2}{y^2}$, која се сменом $y = xu$ и $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ своди на $u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{u^2}$, тј. $\frac{u^2 du}{u^3-2u+1} = -\frac{dx}{x}$. Интеграцијом се добија
$$-\ln|x| = \ln|u-1| + \tfrac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\tfrac{2u+1+\sqrt{5}}{2u+1-\sqrt{5}}\right| + \mathrm{const},$$
што се враћањем $u = \frac{y}{x}$ своди на $\dfrac{2y+(1+\sqrt{5})x}{2y+(1-\sqrt{5})x} \cdot |y-x|^{\sqrt{5}} = C_2$.

9. Означимо $dt = \frac{dx}{2y+3z}$. Имамо
$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{dx}{dt} = 2y + 3z, \\ y' &= \tfrac{dy}{dt} = 2x + 2z, \\ z' &= \tfrac{dz}{dt} = 3x. \end{aligned}$$
Добијени систем решићемо методом сопствених вредности. Матрица система је $A = \left[\begin{smallmatrix} 0&2&3\\ 2&0&2\\ 3&0&0 \end{smallmatrix}\right]$, а њен карактеристични полином $\chi_A(\lambda) = -\det(A-\lambda I) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$. Нуле овог полинома су сопствене вредности матрице A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ и $\lambda_3 = 4$. Сопствени вектори који одговарају овим трима вредностима су редом $v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1\\ 4\\ -3 \end{smallmatrix}\right]$, $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ и $v_3 = \left[\begin{smallmatrix} 8\\ 7\\ 6 \end{smallmatrix}\right]$. Следи да је
$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + 8C_3 e^{4t} \\ 4C_1 e^{-t} \qquad\qquad + 7C_3 e^{4t} \\ -3C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t} + 6C_3 e^{4t} \end{bmatrix}.$$

10. Тотални диференцијали левих страна двеју једначина су
$$dx + dy + dz = 0 \quad \text{и} \quad (2xy+y^2+2yz)dx + (x^2+2xy+2xz)dy + 2xy\,dz = 0.$$
То значи да је вектор (dx, dy, dz) нормалан на векторе
$$\vec{v}_1 = (1,1,1) \quad \text{и} \quad \vec{v}_2 = (2xy+y^2+2yz, x^2+2xy+2xz, 2xy),$$
па следи да је колинеаран с вектором $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (-(x^2+2xz), y^2+2yz, (x-y)(x+y+2z))$. Према томе,
$$\frac{dx}{-(x^2+2xz)} = \frac{dy}{y^2+2yz} = \frac{dz}{(x-y)(x+y+2z)}.$$

11. Означимо $\frac{dx}{z-y} = dt$; тада је $dx = (z-y)dt$, $dy = (xz+1)dt$, $dz = (xy+1)dt$. Имамо $ydy - zdz = (y-z)dt = -dx$, одакле интеграцијом добијамо
$$2x + y^2 - z^2 = C_1.$$
Имамо и $dy - xdx = (xy+1)dt = dz$, па интеграцијом добијамо другу једначину:
$$x^2 - 2y + 2z = C_2.$$

12. Из услова $dx = (7y^2-5z^2)dt$, $dy = (3z^2-7x^2)dt$ и $dz = (5x^2-3y^2)dt$ следи $3dx + 5dy + 7dz = 0$, што интеграцијом даје
$$3x + 5y + 7z = C_1 \quad \text{за неку константу } C_1.$$
Такође је $x^2dx + y^2dy + z^2dz = 0$, што интеграцијом даје другу везу: $x^3 + y^3 + z^3 = C_2$.

13. Из друге једнакости је $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ и интеграцијом $\ln|y|-\ln|z|=\mathrm{const}$, одакле је $z=C_1y$ за неку константу C_1.

Сада можемо да елиминишемо z, па прва једнакост постаје

$$\frac{dx}{x^3+C_1xy^2}=\frac{dy}{2y^3},\quad \text{тј.}\quad \frac{dx}{dy}=\frac{x^3+C_1xy^2}{2y^3}.$$

Препознајемо хомогену једначину и уводимо смену $x=y\cdot u$ и $\frac{dx}{dy}=u+yu'$, чиме добијамо $u+y\frac{du}{dy}=\frac{u^3+C_1u}{2}$, што је једначина са раздвојеним промењљивим: $\frac{dy}{y}=\frac{2du}{u^3+(C_1-2)u}$. Интеграција даје

$$\ln y=\frac{1}{C_1-2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2+C_1-2}\right|+\mathrm{const}$$

и одатле $C_2y^{C_1-2}=\frac{u^2}{u^2+C_1-2}$. Враћањем $u=\frac{x}{y}$ и $C_1=\frac{z}{y}$ добијамо коначно $C_2y^{z/y}=\frac{x^2y^2}{x^2-2y^2+yz}$.

Дакле, опште решење је фамилија кривих $\begin{cases} z=C_1y, \\ x^2y^2=C_2y^{z/y}(x^2-2y^2+yz). \end{cases}$

14. Из једначине следи $dx=\frac{x^2-yz}{y^2}dy$ и $dz=\frac{x^2-xy}{y^2}dy$, па одузимање даје $dx-dz=\frac{xy-yz}{y^2}dy$, тј. $\frac{dx-dz}{x-z}=\frac{dy}{y}$. Интеграцијом следи

$$\ln(x-z)=\ln y+\mathrm{const},\quad \text{тј}\quad x-z=Ay$$

за неку константу A. Из почетног услова $(x,y,z)=(1,1,4)$ налазимо $A=-3$, тј. $z=x+3y$.

Сада елиминишемо z. Имамо $\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2-y(x+3y)}$, што је хомогена једначина $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2-xy-3y^2}{y^2}$. Сменом $x=y\cdot u$ она постаје $u+yu'=u^2-u-3$, тј. $\frac{du}{u^2-2u-3}=\frac{dy}{y}$. Интеграција нам даје

$$4\ln|y|=\ln\left|\frac{3-u}{1+u}\right|+\mathrm{const}=\ln\left|\frac{3y-x}{x+y}\right|+\mathrm{const},\quad \text{тј.}\quad 3y-x=By^4(x+y)$$

за неку константу B. Из почетног услова је $B=\frac{2}{3}$, тј. $2y^4(x+y)=9y-3x$.