Математика 3

Душан Ђукић

4. Скаларна и векторска поља

4.1. Основни појмови

Скаларно поље је пресликавање које свакој тачки простора или дела простора (обично тродимензионалног) додељује скалар, тј. број. Другим речима, то је обична функција више (тачније, трију) промењљивих.

Слично, *векторско поље* је пресликавање које свакој тачки простора или дела простора додељује вектор (обично у три димензије); дакле, то је векторска функција.

Како увести диференцијални рачун на оваквим пресликавањима?

Пре свега, имамо три просторне координате и потребу за диференцирањем по свакој од њих. Уводимо *набла оператор* као вектор-оператор парцијалног диференцирања по свакој од три промењљиве:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

У случају (диференцијабилног) скаларног поља U набла се природно примењује, дајући све информације о понашању функције у околини дате тачке које могу бити потребне. Тако дефинишемо *градијент* $\operatorname{grad} U$ скаларног поља U као

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Градијент је векторско поље - свакој тачки M у простору додељен је вектор $\operatorname{grad} U(M)$.

Приметимо да је тотални диференцијал скаларног поља U једнак

$$dU = U'_x dx + U'_y dy + U'_z dz = \operatorname{grad} U \cdot (dx, dy, dz).$$

По аналогији са изводима, градијент задовољава следећа правила, што се лако проверава:

$$\operatorname{grad}(cU) = c \cdot \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{grad}(U \pm V) = \operatorname{grad} U \pm \operatorname{grad} V,$$
$$\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U, \qquad \operatorname{grad} \frac{U}{V} = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$$

за произвољна скаларна поља U и V и константу $c \in \mathbb{R}$.

Ако нам је познат градијент скаларног поља U у датој тачки M, може се одредити брзина раста поља U у смеру произвољног вектора $\vec{v}$. Наиме, ако је $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, поље U се може апроксимирати Тејлоровим полиномом у околини тачке M као

$$U(M + h\vec{v}) = U(M) + \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cdot hx_v + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cdot hy_v + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cdot hz_v + o(h) = U(M) + h \operatorname{grad} U(M) \cdot \vec{v} + o(h).$$

Тако дефинишемо *извод у смеру вектора* $\vec{v}$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{U(M + h\vec{v}) - U(M)}{h|\vec{v}|} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Овај извод је очито највећи у смеру градијента $\operatorname{grad} U$, тј. у том смеру поље U најбрже расте.

Пример 4.1. Дати су скаларно поље $U(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$, тачка $A(1, 1, 1)$ и вектор $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

Градијент поља U је једнак $\operatorname{grad} U = (2xy, x^2 + 2yz.y^2)$. У тачки A он је једнак $(2, 3, 1)$.

Извод поља U у правцу вектора $\vec{v}$ у тачки A је $\frac{\partial U(A)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} U(A) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2, 3, 1) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, -2) = 2.$

У случају векторског поља $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, где су A_x, A_y, A_z диференцијабилне функције по x, y, z, ситуација је нешто другачија. Будући вектор, набла оператор се може „помножити” вектором $\vec{A}$ на два начина: скаларно и векторски. Тако уводимо појмове *дивергенције* $\operatorname{div}\vec{A}$ и *ротора* $\operatorname{rot}\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,,\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Као што је уобичајено, са $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ означени су јединични вектори дуж координатних оса:

$$\vec{\imath} = (1,0,0), \quad \vec{\jmath} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1). \tag{14}$$

Дакле, дивергенција је број, а ротор је вектор.

Ако је U скаларно поље, правила производа би изгледала овако:

$$\operatorname{div}(U\cdot\vec{A}) = \nabla\cdot(U\cdot\vec{A}) = \nabla U\cdot\vec{A} + U(\nabla\cdot\vec{A}) = \operatorname{grad}U\cdot\vec{A} + U\cdot\operatorname{div}\vec{A},$$

$$\operatorname{rot}(U\cdot\vec{A}) = \nabla\times(U\cdot\vec{A}) = \nabla U\times\vec{A} + U(\nabla\times\vec{A}) = \operatorname{grad}U\times\vec{A} + U\cdot\operatorname{rot}\vec{A}.$$

4.2. Класификација векторских поља

Векторско поље $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ је:

– *хармонијско* ако је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$ у свакој тачки;
– *потенцијално* ако је $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$ у свакој тачки;
– *вртложно* ако је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ у свакој тачки;
– *сложено* ако је $\operatorname{div}\vec{A} \not\equiv 0$ и $\operatorname{rot}\vec{A} \not\equiv \vec{0}$.

Градијент ма ког скаларног поља U је потенцијално векторско поље. Заиста,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U) = \left(\frac{\partial}{\partial y}U'_z - \frac{\partial}{\partial z}U'_y, \frac{\partial}{\partial z}U'_x - \frac{\partial}{\partial x}U'_z, \frac{\partial}{\partial x}U'_y - \frac{\partial}{\partial y}U'_x\right) = (0,0,0).$$

Испоставља се да важи и обратно тврђење:

- За свако потенцијално векторско поље $\vec{A}$ постоји скаларно поље Uтакво да је $\operatorname{grad}U = \vec{A}$. Поље U се назива *потенцијалом* векторског поља $\vec{A}$.

Потенцијал се може једноставно наћи поновљеном интеграцијом.

Пример 4.2. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (2x{+}y{+}1, x{+}z{+}2, y{+}2z{-}1)$ и одредити његов потенцијал ако постоји.

Решење. Имамо

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x{+}y{+}1 & x{+}z{+}2 & y{+}2z{-}1 \end{vmatrix} = (1-1, 0-0, 1-1) = \vec{0},$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial(2x{+}y{+}1)}{\partial x} + \frac{\partial(x{+}z{+}2)}{\partial y} + \frac{\partial(y{+}2z{-}1)}{\partial z} = 2+0+2 = 4.$$

Ове вредности класификују поље као потенцијално, али не и хармонијско.

Сада ћемо наћи његов потенцијал U.

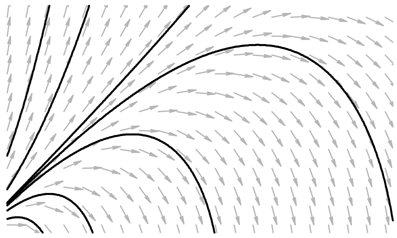
– Пошто је $U'_x = 2x+y+1$, интеграцијом по dx добијамо $U = \int U'_x dx = x^2+xy+x+E(y,z)$. Приметимо да, мада је E константа по x, она може да зависи од y и z.
– Даље, како је $x+z+2 = U'_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+x+E(y,z)) = x+E'_y$, имамо $E'_y = z+2$ и, интеграцијом по dy, $E = yz+2y+D(z)$, те је $U = x^2+xy+yz+x+2y+D(z)$. Сада „константа” D зависи само од z.
– Најзад, како је $y+2z-1 = U'_z = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+xy+yz+x+2y+D(z)) = y+D'(z)$, следи $D'(z) = 2z-1$ и одатле $D = z^2-z+C$ за неку „праву” константу C. Према томе, $U = x^2+xy+yz+z^2+x+2y-z+C$.

4.3. Векторске линије

Векторска линија векторског поља $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ је диференцијабилна крива чији је вектор тангенте у свакој својој тачки P колинеаран с вектором $\vec{A}(P)$. Та крива задовољава систем једначина у симетричном облику:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

На пример, ако векторско поље $\vec{A}$ представља поље ваздушних струја, честица ће се у њему кретати векторском линијом.



Пример 4.3. Одредити векторску линију векторског поља $\vec{A} = (xy, -x^2, yz+z)$ која пролази кроз тачку $M(4,3,2)$.

Решење. Треба решити систем

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$$

уз почетне услове $(x,y,z) = (4,3,2)$. Из прве једнакости имамо $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, тј. $xdx = -ydy$, па интеграцијом следи $x^2 + y^2 = C_1$. Из припадности тачке M следи $C_1 = 25$.

Заменом $y = \sqrt{25 - x^2}$ у једнакости $\frac{dz}{dx} = \frac{yz+z}{xy}$ добијамо једначину са раздвојеним променљивим

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{dz}{z}.$$

Интеграција даје $\frac{6}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(5 + \sqrt{25 - x^2}) = \ln|z| + \text{const}$, дакле, $z^5(y+5) = C_2 x^6$. Из припадности тачке M следи $C_2 = \frac{1}{16}$.

Решење је крива дата условима $x^2 + y^2 = 25$ и $x^6 = 16z^5(y+5)$.

4.4. Задаци

1. Са $\vec{r} = (x,y,z)$ означавамо вектор положаја, а са $r = |\vec{r}|$ његов интензитет. За коју константу a је поље $\vec{A} = r^a \vec{r}$ хармонијско?

2. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (e^x y + e^z, e^y z + e^x, e^z x + e^y)$. Одредити извод његовог потенцијала U у тачки $M(-1,1,0)$ у правцу вектора $\vec{v} = (2,2,-1)$, ако тај потенцијал постоји.

3. Дато је векторско поље $\vec{A} = \left(\frac{3x-2z}{x}, \frac{2x-2z}{y}, \frac{3x-4z}{z}\right)$. Одредити константе a, b и c за које је поље $x^a y^b z^c \cdot \vec{A}$ потенцијално. За те вредности a, b, c наћи извод потенцијала у тачки $P(1,1,1)$ у правцу вектора $\vec{v} = (1,1,1)$.

4. Израчунати дивергенцију и ротор векторског поља $\vec{A} = e^{z-y}(y, x-xy-1, xy+1)$ у тачки $P(2,1,1)$. Одредити потенцијал поља $\vec{A}$ ако постоји.

5. Наћи дивергенцију, ротор и потенцијал векторског поља $\vec{A} = (x^2 + yz, z^2 + xz, 2yz + xy)$.

6. Дато је векторско поље $\vec{A} = (2x+ay+3z,\ -2y+bz,\ cx+y+4z)$, где су a, b и c реални параметри. Наћи вредности a, b, c за које је поље $\vec{A}$ потенцијално и одредити његов потенцијал.

7. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (x+y+z)^\alpha\big((y+2z,\ z-x,\ -2x-y\big)$ у зависности од параметра α. Одредити његов потенцијал за ону вредност α за коју он постоји.

8. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (yz+1, xz, xy+x)$ и одредити векторску линију која пролази кроз тачку $P(0,0,0)$.

9. Дато је векторско поље $\vec{A} = (2z, y, y+2x)$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $P(0,1,3)$. Одредити векторску линију која пролази кроз тачку P.

10. Одредити векторске линије векторског поља $\vec{A} = (x,\ 3y-z,\ z-x-3y)$. За коју вредност параметра a је поље $\vec{v} \times \vec{A}$ вртложно, где је $\vec{v} = (1,a,1)$?

11. Наћи векторску линију векторског поља $\vec{A} = (x, x+z, x+y)$ која пролази кроз тачку $(1,1,0)$.

12. Дато је векторско поље $\vec{A} = (x^2 - 1,\ 1 - y^2,\ x - y)$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $(2,3,0)$. Одредити његове векторске линије.

4.5. Решења

1. Дивергенција и ротор поља $\vec{r}$ су

$$\operatorname{div}\vec{r} = \tfrac{\partial}{\partial x}x + \tfrac{\partial}{\partial y}y + \tfrac{\partial}{\partial z}z = 3 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\vec{r} = \big(\tfrac{\partial}{\partial y}z - \tfrac{\partial}{\partial z}y, \tfrac{\partial}{\partial z}x - \tfrac{\partial}{\partial x}z, \tfrac{\partial}{\partial x}y - \tfrac{\partial}{\partial y}x\big) = (0,0,0).$$

Такође је $\frac{\partial}{\partial x}r^a = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{a}{2}-1}\cdot 2x = ar^{a-2}x$ и, слично, $\frac{\partial}{\partial y}r^a = ar^{a-2}y$ и $\frac{\partial}{\partial z}r^a = ar^{a-2}z$, па је $\operatorname{grad} r^a = ar^{a-2}\vec{r}$. Сада је

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A} &= (\operatorname{grad} r^a)\cdot\vec{r} + r^a\operatorname{div}\vec{r} = ar^{a-2}\vec{r}\cdot\vec{r} + 3r^a = (a+3)r^a,\\ \operatorname{rot}\vec{A} &= (\operatorname{grad} r^a)\times\vec{r} + r^a\operatorname{rot}\vec{r} = ar^{a-2}\vec{r}\times\vec{r} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Поље $\vec{A}$ је хармонијско ако је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, тј. за $a = -3$.

2. Имамо $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$, па је ово потенцијално поље. Његов потенцијал U тада постоји и важи $\operatorname{grad} U = \vec{A}$. Одмах знамо и извод потенцијала U у правцу вектора $\vec{v}$:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial\vec{v}} = \operatorname{grad} U(M)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{A}(M)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \Big(\frac{1}{e}+1, \frac{1}{e}, e-1\Big)\cdot\frac{1}{3}(2,2,-1) = 1 - \frac{e}{3} + \frac{4}{3e}.$$

Потенцијал је $U = e^x y + e^y z + e^z x + C$, али њега није било неопходно наћи.

3. Поље је потенцијално ако му је ротор нула, а ротор датог поља је

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x^a y^b z^c\frac{3x-2z}{x} & x^a y^b z^c\frac{2x-2z}{y} & x^a y^b z^c\frac{3x-4z}{z}\end{vmatrix}\\ &= x^a y^b z^c\big(\tfrac{(3b-2c)x+2(c-2b+1)z}{yz}, \tfrac{3(c-a-1)x+2z(2a-c-1)}{zx}, \tfrac{(2a-3b+2)x+2(b-a)z}{xy}\big).\end{aligned}$$

Ово је нула ако је $3b-2c = c-2b+1 = c-a-1 = 2a-c-1 = 2a-3b+2 = b-a = 0$, а то важи ако је $(a,b,c) = (2,2,3)$.

Ако је U потенцијал, његов извод у правцу вектора $\vec{v}$ је $\operatorname{grad} U\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{A}(P)\cdot(1,1,1) = 0$.

4. Имамо $\operatorname{div}\vec{A} = 2(xy-x+1)e^{z-y}$, те је $\operatorname{div}\vec{A}(P) = 2$, и $\operatorname{rot}\vec{A}\equiv\vec{0}$. Дакле, поље $\vec{A}$ је потенцијално, а потенцијал U задовољава

$$\begin{array}{rlll} & U'_x = e^{z-y}y & \Rightarrow\quad U = \int U'_x dx = xye^{z-y} + C(y,z), & \\ \text{затим} & U'_y = (x-xy)e^{z-y} + C'_y & \Rightarrow\quad C'_y = -e^{z-y} & \Rightarrow\quad C = \int_y C'_y dy = e^{z-y} + D(z),\\ \text{и најзад} & U'_z = (xy+1)e^{z-y} + D'(z) & \Rightarrow\quad D' = 0 & \Rightarrow\quad D = \text{const.}\end{array}$$

Тако смо добили $U = (xy+1)e^{z-y} + \text{const.}$

5. Рачунамо $\operatorname{div}\vec{A} = \Delta\cdot\vec{A} = 2x+2y$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = \Delta\times\vec{A} = (0,0,0)$, па постоји и потенцијал U. За њега важи

$$\begin{array}{rll} & U'_x = x^2 + yz & \Rightarrow\quad U = \frac{1}{3}x^3 + xyz + A(y,z),\\ \text{затим} & U'_y = z^2 + xz & \Rightarrow\quad A = yz^2 + B(z),\\ \text{и најзад} & U'_z = 2yz + xy & \Rightarrow\quad B = \text{const.}\end{array}$$

Дакле, $U = \frac{1}{3}x^2 + xyz + yz^2 + \text{const.}$

6. Ротор датог поља је $\vec{A} = (1-b, 3-c, -a)$, што је нула-вектор за $(a,b,c) = (0,1,3)$ и тада је

$$\vec{A} = (2x+3z, z-2y, 3x+y+4z)$$

потенцијално поље.

Његов потенцијал U задовољава $U'_x = 2x+3z$, дакле $U = \int(2x+3z)dz = x^2 + 3xz + E(y,z)$.

Даље, $z-2y = U'_y = E'_y$, па је $E = zy - y^2 + D(z)$ и $U = x^2 + 3xz - y^2 + yz + D(z)$.

Најзад, $3x+y+4z = U'_z = 3z + y + D'(z)$, па је $D = 2z^2 + C$ и $U = x^2 + 3xz - y^2 + yz + 2z^2 + C$.

7. Имамо $\operatorname{div}\vec{A} = 3\alpha(z-x)(x+y+z)^{\alpha-1}$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = (\alpha+2)(x+y+z)^{\alpha}(-1,2,-1)$.
Дивергенција је нула само за $\alpha = 0$, а ротор је нула само за $\alpha = -2$. Поље је потенцијално за $\alpha = -2$, вртложно за $\alpha = 0$ и сложено у осталим случајевима.

   За $\alpha = -2$ постоји потенцијал U и важи
$$U'_x = \frac{y+2z}{(x+y+z)^2}, \quad U'_y = \frac{z-x}{(x+y+z)^2}, \quad U'_z = -\frac{2x+y}{(x+y+z)^2}.$$
Из прве једнакости следи $U = \frac{y+2z}{(x+y+z)^2}dx = -\frac{y+2z}{x+y+z} + C(y,z)$, а одатле диференцирањем по y и z следи из $C'_y = C'_z = 0$, тј. C је константа и $U = -\frac{y+2z}{x+y+z} + \text{const}$.

8. Поље је потенцијално, јер је $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, али не и хармонијско, јер је $\operatorname{rot}\vec{A} = (0,-1,0)$.
Векторске линије задовољавају систем $\frac{dx}{yz+1} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy+x}$. Из друге једнакости је $(y+1)dy = zdz$, па интеграцијом следи $(y+1)^2 - z^2 = C_1$. Замена $(x,y,z) = (0,0,0)$ даје $C_1 = 1$, тј. $z = \sqrt{y^2+2y}$.
Заменом z у једначини добијамо
$$\frac{dx}{y\sqrt{y^2+2y}+1} = \frac{dy}{x\sqrt{y^2+2y}}, \quad \text{тј.} \quad x\,dx = \Big(y + \frac{1}{\sqrt{y^2+2y}}\Big)dy.$$
Интеграцијом добијамо $x^2 = y^2 + 4\ln\big(\sqrt{y}+\sqrt{y+2}\big) + C_2$. Замена $x = y = 0$ даје $C_2 = -2\ln 2$.

9. Имамо $\operatorname{div}\vec{A} = 1$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = (1,0,0) = \vec{\imath}$; оба су константна. Нађимо још векторске линије.
Ако је $\frac{dx}{2z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{y+2x} = dt$, онда је $dx+dy+dz = 2(x+y+z)dt$ и одатле $\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{dy}{y}$, па интеграцијом следи $2\ln|y| = \ln|x+y+z| + \text{const}$. Одавде је $x+y+z = C_1y^2$.
Вратимо $z = C_1y^2 - x - y$ у полазни систем:
$$\tfrac{dy}{y} = \tfrac{dx}{2z} = \tfrac{dx}{2(C_1y^2-x-y)}, \quad \text{тј.} \quad \tfrac{dx}{dy} = \tfrac{2(C_1y^2-x-y)}{y} = 2C_1y - 2 - \tfrac{2x}{y},$$
што је линеарна диференцијална једначина по x као функцији по y: $x' + \frac{2}{y}x = 2C_1y - 2$. Решење је $x = \frac{C_2}{y^2} + \frac{1}{2}C_1y^2 - \frac{2}{3}y$, тј. $y^2(3x+y-3z) = 6C_2$.
Заменом $(x,y,z) = (0,1,3)$ налазимо $C_1 = 4$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$, па је тражена векторска линија дата једначинама
$$x+y+z = 4y^2, \quad y^2(3x+y-3z) = -8.$$

10. За почетак, из $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{3y-z} = \frac{dz}{z-x-3y} = dt$ одмах следи $dx+dy+dz = 0$, па је $x+y+z = C_1$.
Заменом $z = C_1 - x - y$ у једначину добијамо $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+4y-C_1}$, тј. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + \frac{x-C_1}{x}$, што је линеарна једначина по y. Њено решење је $y = \frac{C_1}{4} - \frac{x}{3} + C_2x^4$.
Најзад, дивергенција поља $\vec{v}\times\vec{A} = (-3ax-(a+3)y+(a+1)z,\ 4x+y-z,\ -ax+3y-z)$ је $-3a$, па је поље вртложно само за $a = 0$.

11. Систем једначина $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$ $(= dt)$ може се записати у нормалном облику: $x' = \frac{dx}{dt} = x$, $y' = \frac{dy}{dt} = x+z$ и $z' = \frac{dz}{dt} = x+y$. Одмах добијамо $x = Ae^t$, а даље систем решавамо као што смо навикли:
$$y' = Ae^t + z, \quad y'' = Ae^t + z' = 2Ae^t + y, \quad \text{тј.} \quad y'' - y = 2Ae^t.$$
Хомогено решење по y је $y_h = Be^t + Ce^{-t}$, а партикуларно тражимо у облику Dte^t и налазимо $y_p = te^t$ и $y = (t+B)e^t + Ce^{-t}$. Одатле је $z = y' - Ae^t = (t+B-A+1)e^t - Ce^{-t}$. Према томе,
$$(x,y,z) = (Ae^t,\ (t+B)e^t+Ce^{-t},\ (t+B-A+1)e^t-Ce^{-t}).$$
Најзад, за векторску линију која садржи тачку $P(1,1,0)$, слободним одабиром $t = 0$ налазимо $(1,1,0) = (A, B+C, B-A-C+1)$, тј. $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$.

12. Дивергенција је $\operatorname{div}\vec{A} = 2x - 2y = -2$, а ротор $\operatorname{rot}\vec{A} = (-1-0)\vec{\imath} + (0-1)\vec{\jmath} + (0-0)\vec{k} = (-1,-1,0)$.
Векторске линије налазимо из система $\frac{dx}{x^2-1} = \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dz}{x-y} = dt$. Из прве једнакости добијамо једначину са раздвојеним променљивим чије је решење $\ln|\frac{x-1}{x+1}| + \ln|\frac{y-1}{y+1}| = \text{const}$, што значи
$$\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1} = C_1, \quad \text{тј.} \quad (x-1)(y-1) = C_1(x+1)(y+1).$$
Такође, из $dz = (x-y)dt$ и $dx+dy = (x^2-y^2)dt = (x+y)dz$ следи $dz = \frac{d(x+y)}{x+y}$, одакле је интеграцијом
$$z = \ln|x+y| + \text{const}, \quad \text{тј.} \quad x+y = C_2e^z.$$