Математика 3

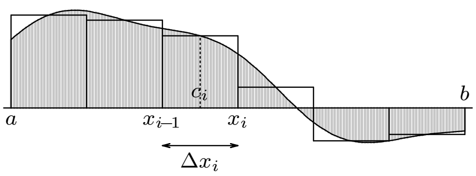
Душан Ђукић

5. Криволинијски интеграли

5.1. Заснивање

Подсетимо се како смо увели одређени интеграл функције $f(x)$ на сегменту $[a, b]$.

Посматрајмо поделу сегмента $[a, b]$ подеоним тачкама $a = x_0,\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ x_n = b$ на подинтервале и у сваком подинтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ одаберимо тачку c_i. За дату поделу, са δ означавамо највећу од разлика $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ за $i = 1, \ldots, n$.



– Интегрална сума је сума $S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$. На слици је то збир површина правоугаоника.

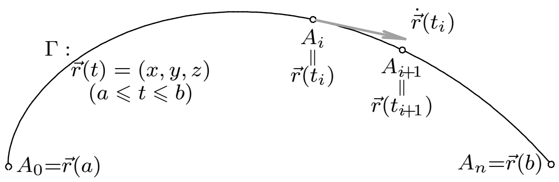
– Интеграл $\int_a^b f\,dx$ је лимес интегралне суме S када подела тежи најситнијој могућој, тј. када $\delta \to 0$. На слици је то површина испод криве.

Аналогним поступком бисмо могли да дефинишемо интеграл функције $f : \Phi \to \mathbb{R}$ по било ком мерљивом објекту Φ. Заиста, тај поступак ћемо понављати више пута. Интегрална сума је сума вредности функције у неким "истакнутим" тачкама помножених одговарајућих тежинама, а интеграл је лимес интегралне суме. Дакле, интеграл је нека врста суме вредности функције у "свим" тачкама, где је свака вредност помножена одговарајућом тежином.

У овој глави објекат Φ је крива Γ задата параметарски:

$$\Gamma :\ \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \text{за} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{15}$$

Извод векторске функције $\vec{r}$ је $\dot{\vec{r}}(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$. Подразумевамо да је крива *глатка*, тј. да су функције $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрекидно диференцијабилне (скоро свуда). То је готово увек случај.



Подела Π интервала $[a, b]$ на подинтервале $[t_{i-1}, t_i]$ за $i = 1, 2, \ldots, n$, где су

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b, \tag{16}$$

одређује поделу криве Γ на лукове Γ_i (од тачке $A_{i-1} = \vec{r}(t_{i-1})$ до тачке $A_i = \vec{r}(t_i)$). *Финоћа поделе* δ је највећа од дужина подинтервала $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

На сваком од подинтервала $[t_{i-1}, t_i]$ одабрана је *истакнута тачка* c_i, чиме су одређене и истакнуте тачке $M_i = \vec{r}(c_i)$ на луку криве Γ_i.

5.2. Интеграл скаларног поља по кривој

Дате су крива Γ, задата једначином (15), и функција f (тј. скаларно поље) дефинисана у тачкама криве. Интеграл функције f по кривој Γ, познат и као *криволинијски интеграл прве врсте*, означава се као

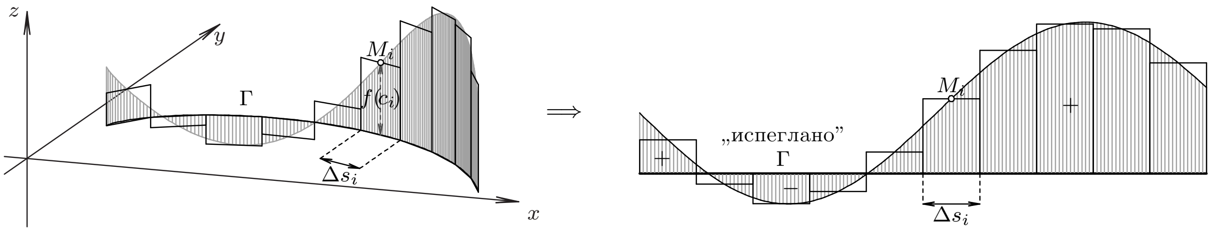
$$I = \int_\Gamma f\,ds$$

и интуитивно представља „количину" функције на кривој.

Посматрајмо поделу Π криве Γ задату са (16) и означимо са Δs_i дужину дела Γ_i.

Интеграална сума је

$$S = S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta s_i.$$



Интеграл I се дефинише као лимес интегралне суме S када подела Π тежи најфинијој могућој, тј. када $\delta = \max_i \Delta t_i$ тежи нули. На слици је то површина шрафиране површи над кривом (површина „испод” криве рачуна се као негативна).

Пошто дужину Δs_i можемо да апроксимирамо дужином дужи $A_{i-1}A_i$:

$$\Delta s_i \approx A_{i-1}A_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \approx (t_i - t_{i-1})|\dot{\vec{r}}(t_i)| = \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2 + z'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

пуштањем $\Delta t_i \to 0$ следи да се диференцијал ds дужине криве може изразити као

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt.$$

Према томе:

$$I = \int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{x'(t)^2{+}y'(t)^2{+}z'(t)^2}\, dt.$$

Дужина ℓ криве Γ је интеграл јединице по кривој:

$$\ell = \int_\Gamma 1\, ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

У специјалном случају када је крива Γ задата у равни једначином $y = y(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, улогу параметра t може да преузме x. Тада имамо $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$ и

$$I = \int_\Gamma f(x,y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Пример 5.1. Ако је Γ кружница дата једначином $x^2 + y^2 = 1$, израчунати $I = \displaystyle\int_\Gamma x^2\, ds$.

Решење. Параметризација дате кружнице је

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Овде је $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ и $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = dt$, па интеграл I постаје

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \overset{=0}{\cancel{\cos 2t}}}{2}\, dt = \pi.$$

5.3. Интеграл векторског поља по кривој

Сада је на кривој Γ са једначином (15) дато векторско поље $\vec{A} = (P, Q, R)$. Интеграл поља $\vec{A}$ по кривој Γ:

$$I = \int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

познат и као *криволинијски интеграл друге врсте*, у ствари представља „дејство” (тј. *рад*) векторског поља дуж криве. Овде учествује векторски диференцијал $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt = (dx, dy, dz)$, где су

$$dx = x'(t)\, dt, \quad dy = y'(t)\, dt, \quad dz = z'(t)\, dt,$$

тако да се горњи интеграл може записати као

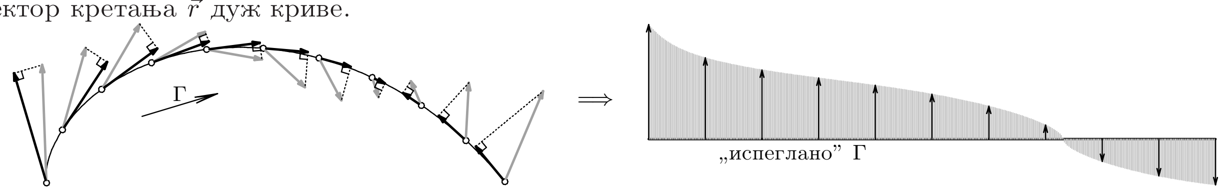
$$I = \int_\Gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz')\, dt, \tag{17}$$

при чему су $P = P(x(t), y(t), z(t))$, $Q = Q(x(t), y(t), z(t))$ и $R = R(x(t), y(t), z(t))$ такође функције по t.

Како је $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}\, ds$, интеграл векторског поља се своди на интеграл скаларног дуж криве:

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \vec{A} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}\, ds = \int \operatorname{Proj}_{\dot{\vec{r}}} \vec{A}\, ds.$$

Другим речима, то је интеграл *пројекције* векторског поља $\vec{A}$ (тачније, њене усмерене дужине) на вектор кретања $\dot{\vec{r}}$ дуж криве.



Примећујемо да интеграл векторског поља зависи од *оријентације* криве, тј. од смера кретања дуж ње. Промена оријентације узрокује промену знака скаларних производа $\vec{A} \cdot \dot{r}$, а самим тим и вредности интеграла. За разлику од њега, интеграл скаларног поља је независан од смера кретања.

Пример 5.2. Дате су константе $a, b > 0$. Крива Γ је лук криве дате једначином $y^a = x^b$ од тачке $A(0,0)$ до тачке $B(1,1)$. Израчунати $I = \int_\Gamma xdy + ydx$.

Решење. Криву можемо параметризовати једначинама

$$x = t^a \quad \text{и} \quad y = t^b \quad \text{за } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тада имамо $dx = at^{a-1}dt$, $dy = bt^{b-1}dt$ и

$$I = \int_0^1 (t^a \cdot bt^{b-1} + t^b \cdot at^{a-1})dt = \int_a^b (a+b)t^{a+b-1}dt = (a+b) \cdot \frac{1}{a+b} = 1.$$

Ова вредност не зависи од a и b.

Интеграл векторског поља има различите физичке интерпретације. На пример, замислимо честицу која, крећући се фиксном путањом Γ, пролази кроз поље ваздушних струја $\vec{A}$. У тачки $M = \vec{r}(t)$ честица има вектор брзине $\dot{\vec{r}}(t)$, а струјање брзине $\vec{A}(\vec{r}(t))$ ће јој задати убрзање једнако $\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$. Другим речима, интеграл I мери укупну промену у интензитету брзине честице коју ће струје проузроковати дуж криве Γ.

У случају када је крива Γ затворена користи се и термин *циркулација* поља, уз ознаку $\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$.

Пример 5.3. Наћи интеграл $I = \oint (y^2 - z)dx - x\, dy$ дуж затворене криве дате условима $x^2 + 4y^2 = 4$ и $x + y + z = 2$, оријентисане у смеру казаљке на сату.

Решење. Користимо параметризацију

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2 - 2\cos t - \sin t,$$

али због оријентације криве (у негативном смеру) параметар t се креће од 2π до 0.

Како је $dx = -2\sin t\, dt$ и $dy = \cos t\, dt$, имамо

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\pi}^0 \big((\cos^2 t + 2\cos t + \sin t - 2) \cdot (-2\sin t) - 2\cos t \cdot \cos t\big)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \big(-2(\cos^2 t + 2\cos t - 2)\sin t - 2\sin^2 t - 2\cos^2 t\big)dt = 2\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\cos t - 2)\sin t + 2\int_0^{2\pi} dt. \end{aligned}$$

Најзад, сменом $\left|{}^{y=\cos t}_{dy=-\sin t\, dt}\right|$ добијамо $I = -2\int_1^1 (y^2 + 2y - 2)dy + 4\pi = 4\pi$.

5.4. Путна независност интеграла векторског поља

У примеру 5.2 појавило се (дводимензионално) векторско поље $\vec{A} = (y, x)$ чији је интеграл $\int y\, dx + x\, dy$ по разним путевима од тачке $(0,0)$ до тачке $(1,1)$ био исти. Разлог томе је што је (y, x) *градијент* функције $f(x, y) = xy$, те је интегранд $y\, dx + x\, dy$ заправо њен тотални диференцијал df.

Ако је векторско поље $\vec{A}$ потенцијално, оно је градијент свог потенцијала U, тј.

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U.$$

Тада је извод сложене функције $U \circ \vec{r}$ једнак

$$\frac{dU(\vec{r}(t))}{dt} = \operatorname{grad} U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t).$$

То значи да, ако је крива Γ задата једначином (15), важи

$$\int_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_a^b \frac{dU(\vec{r}(t))}{dt}\,dt = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)) = U(B) - U(A),$$

што у ствари не зависи од путање Γ, већ само од њене почетне тачке A и крајње тачке B.

Пример 5.4. Дате су тачке $A(1,2)$ и $B(2,1)$, а Γ је произвољна крива од A до B.

(а) Доказати да интеграл $\int_A^B \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ не зависи од путање Γ и израчунати га.

(б) Показати да интеграл $\int_\Gamma (y\,dx - x\,dy)$ *зависи* од путање Γ.

Решење. (а) Дати интеграл је интеграл векторског поља $\vec{A} = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2})$ у две димензије. Додајмо му и трећу димензију: $\vec{A} = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0)$. Тада је $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$, па је ово поље потенцијално, а лако налазимо да му је потенцијал $U = \frac{x}{y} + \text{const}$.

Тражени интеграл је

$$U(B) - U(A) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(б) Поље $(y, -x, 0)$ није потенцијално, али то још увек није доказ. Израчунаћемо интеграле дуж две различите путање од A до B и видећемо да су различити.

(1) $I_1 = \int_{\Gamma_1} (y\,dx - x\,dy)$ по *дужи* AB: $x = t$, $y = 3 - t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$. Имамо

$$I_1 = \int_1^2 \big((3-t)\cdot 1 - t \cdot (-1)\big)\,dt = 3.$$

(2) $I_2 = \int_{\Gamma_1} (y\,dx - x\,dy)$ по *луку круга*: $x = 1 + \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Имамо

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \big((1+\cos t)\cos t - (1+\sin t)(-\sin t)\big)\,dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t + \cos t + 1) = 2 + \frac{\pi}{2} \neq 3.$$

5.5. Задаци

1. Крива γ је дата параметарски: $(x,y) = (4\sin t, t - \sin t \cos t)$ за $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Израчунати $I = \displaystyle\int_\gamma x\,ds$.
2. Крива γ у простору је дата условима $x = \cos z$, $y = \sin z$, $0 \leqslant z \leqslant \pi$. Одредити $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{y\,ds}{x+2}$.
3. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_s \sqrt{4-x}\,ds$, где је s дуж AB с крајевима $A(3,2,0)$ и $B(0,1,1)$.
4. Ако је Γ кружница дата једначином $x^2 + y^2 = 2x$, израчунати $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x}\,ds$.
5. Израчунати интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{x+y+z}$ по кривој γ у пресеку површи $y^2 + z^2 = 2xz$ и $\ln\frac{z}{2} = 1 + \frac{y}{z}$ између равни $z = 2$ и $z = 2e$.
6. Наћи интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma z\,ds$, где је γ крива у пресеку полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.
7. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{12z - 2z^2 - 3}\,ds$, где је γ крива у пресеку површи $z = x^2 + y^2$ и равни $x + y + z = 2$.
8. Наћи интеграл $I = \displaystyle\int_\gamma (1+y)\,ds$ по *кардиоиди*: $x = (1-\cos t)\cos t$, $y = (1-\cos t)\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

9. Крива γ је круг $x^2+y^2=1$. Израчунати интеграле (а) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+x)\,ds$ и (б) $\displaystyle\oint_\gamma (x^2+x)\,dy$ у позитивном смеру.

10. Крива γ је дата условима $(x,y)=(t^3+t,t^3-t)$ за $0\leqslant t\leqslant 1$. Израчунати $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x+y}\,dx+\sqrt{x-y}\,dy$.

11. Наћи интеграл $\displaystyle\int_\gamma x\,dy+y\,dz+z\,dx$, где је γ завојница дата условима $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,t)$ за $0\leqslant t\leqslant \pi$.

12. Израчунати $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}(y-z)^2dx+(z-x)^2dy+(x-y)^2dz$, где је $\mathcal{C}$ контура троугла ABC с теменима $A(0,0,0)$, $B(1,2,-1)$ и $C(2,-1,1)$.

13. Израчунати $I=\displaystyle\int_\gamma \frac{dx+dy+dz}{y^2+2z^2}$, где је γ крива $y=\sqrt{x}$, $z=\sqrt{1-x}$ од тачке $A(0,0,1)$ до тачке $B(1,1,0)$.

14. Израчунати $I=\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x^2dx+xy\,dy$, где је $\mathcal{C}$ део криве $x^2+xy+y^2=1$ у првом квадранту од тачке $A(1,0)$ до тачке $B(0,1)$.

15. Одредити интеграл $I=\displaystyle\oint_\gamma \frac{dx}{y}+\frac{dy}{z}+\frac{dz}{x}$, где је γ позитивно оријентисана крива у пресеку цилиндра $y^2+z^2=1$ и конуса $x^2+y^2=z^2$ у полуравни $z\geqslant 0$.

16. Одредити константу α за коју криволинијски интеграл $\int_\gamma(x^3dx+y^3dy+z^3dz)(x^4+y^4+z^4)^\alpha$ не зависи од пута, где је γ било која крива од тачке $A(-1,0,1)$ до тачке $B(3,4,5)$.

17. Проверити да ли интеграл $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} e^{x-y}\big((xy+y+z^2)dx-(xy-x+z^2)dy+2z\,dz\big)$ не зависи од пута и одредити га.

5.6. Решења

1. Како је $x'=4\cos t$ и $y'=2-2\cos^2 t$, имамо $ds=\sqrt{16\cos^2 t+(2-2\cos^2 t)^2}dt=2(1+\cos^2 t)dt$. Добијамо
$$I=8\int_0^\pi \sin t(1+\cos^2 t)dt=\Big\|{}^{u=\cos t}_{du=-\sin t\,dt}\Big\|=8\int_{-1}^1(1+u^2)\,du=\frac{64}{3}.$$

2. За параметризацију користимо промењљиву z. Изводи по z су $x'=-\sin z$, $y'=\cos z$ и $z'=1$, па је $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{2}\,dt$. Добијамо
$$I=\sqrt{2}\int_0^\pi\frac{\sin z\,dz}{2+\cos z}=\Big\|{}^{u=2+\cos z}_{du=-\sin z\,dz}\Big\|=\int_1^3\frac{du}{u}=\ln 3.$$

3. Прво параметризујемо дуж AB: она је дата једначином
$$(x,y,z)=A+t\cdot\overrightarrow{AB}=(3,2,0)+t(-3,-1,1)=(3-3t,2-t,t).$$
Сада је $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{11}\,dt$ и $\sqrt{4-x}=\sqrt{1+3t}$, па је тражени интеграл
$$I=\int_0^1\sqrt{1+3t}\sqrt{11}\,dt=\Big\|{}^{u=1+3t}_{du=3dt}\Big\|=\frac{\sqrt{11}}{3}\int_1^4u^{1/2}du=\frac{\sqrt{11}}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{u=1}^{u=4}=\frac{14\sqrt{11}}{9}.$$

4. Дата кружница има једначину $(x-1)^2+y^2=1$, тј. има центар $A(1,0)$ и полупречник $r=1$, па се може параметризовати поларним координатама: $x-1=\cos t$ и $y=\sin t$, $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$.
Сада је $x'=-\sin t$, $y'=\cos t$ и $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=dt$, па имамо
$$\int_\Gamma\sqrt{x}\,ds=\int_{-\pi}^\pi\sqrt{1+\cos t}\,dt=\int_{-\pi}^\pi\sqrt{2\cos^2\tfrac{t}{2}}\,dt=\sqrt{2}\int_{-\pi}^\pi\cos\frac{t}{2}\,dt=\sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{t}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=4\sqrt{2}.$$

5. Да бисмо параметризовали криву, означићемо $1+\frac{y}{z}=t$. Из друге једначине следи $z=2e^t$ и одатле $y=2(t-1)e^t$, а онда прва једначина даје $x=(t^2-2t+2)e^t$. Следи

$$x'=t^2e^t,\quad y'=2te^t,\quad z'=2e^t\quad \text{и}\quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=e^t\sqrt{t^4+4t^2+4}\,dt=(t^2+2)e^t\,dt.$$

Најзад, услов $2\leqslant z\leqslant 2e$ се своди на $0\leqslant t\leqslant 1$, па добијамо $I=\int_0^1 dt=1$.

6. Прво параметризујемо криву. Дати цилиндар има једначину $(x-1)^2+y^2=1$, па њега параметризујемо поларним координатама: $x=1+\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. Из једначине полусфере добијамо $z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{2-2\cos\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2}$.

Имамо $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{1+\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, па следи

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=\Big|{}_{dt=\frac12\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi}^{t=-\cos\frac{\varphi}{2}}\Big|=4\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt\\&=4\cdot\frac12\Big(t\sqrt{t^2+1}+\ln\big(t+\sqrt{t^2+1}\,\big)\Big)\Big|_0^1=4\sqrt2+4\ln(1+\sqrt2).\end{aligned}$$

7. Тачке на кривој γ задовољавају једначину $x^2+y^2+x+y-2=0$, тј. $(x+\frac12)^2+(y+\frac12)^2=\frac52$, па криву можемо да параметризујемо поларним координатама:

$$x=\tfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\varphi-\tfrac12,\quad y=\tfrac{\sqrt{10}}{2}\sin\varphi-\tfrac12\quad\text{и}\quad z=3-\tfrac{\sqrt{10}}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi).$$

Сада је

$$ds=\sqrt{x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2}\,d\varphi=\sqrt{5(1-\sin\varphi\cos\varphi)}\,d\varphi,$$

$$\sqrt{12z-2z^2-3}=\sqrt{15-2(z-3)^2}=\sqrt{10(1-\sin\varphi\cos\varphi)},$$

па добијамо $\int_\gamma\sqrt{12z-2z^2-3}\,ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{50}(1-\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi=2\pi\sqrt{50}=10\pi\sqrt2$.

8. Имамо $x'=\sin t-\sin 2t$ и $y'=\cos t-\cos 2t$, па је

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{2-2\sin t\sin 2t-2\cos t\cos 2t}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\sin\tfrac{t}{2}\,dt.$$

Сада је $I=2\int_0^{2\pi}(1+\sin t-\sin t\cos t)\sin\frac t2\,dt$. Како је $2\sin t\sin\frac t2=\cos\frac t2-\cos\frac{3t}{2}$ и $2\sin t\cos t\sin\frac t2=\frac12\cos\frac{3t}{2}-\frac12\cos\frac{5t}{2}$, добијамо

$$I=\int_0^{2\pi}\left(2\sin\frac t2+\cos\frac t2-\frac32\cos\frac{3t}{2}+\frac12\cos\frac{5t}{2}\right)=\left(2\sin\frac t2-4\cos\frac t2-\sin\frac{3t}{2}+\frac15\sin\frac{5t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=8.$$

9. Кружницу параметризујемо као $x=\cos t$ и $y=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Тада је

$$x'=-\sin t,\quad y'=\cos t,\quad dy=\cos t\,dt,\quad ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=dt.$$

(а) $\oint_\gamma(x^2+x)\,ds=\int_0^{2\pi}(\cos^2t+\cos t)dt=\pi$.

(б) $\int_\gamma(x^2+x)\,dy=\int_0^{2\pi}(\cos^2t+\cos t)\cos t\,dt=\pi$.

10. Имамо $\sqrt{x+y}=\sqrt{2t^3}$, $\sqrt{x-y}=\sqrt{2t}$, $dx=(3t^2+1)dt$ и $dy=(3t^2-1)dt$. Овако се дати интеграл I своди на интеграл по t:

$$I=\int_0^1\big(\sqrt{2t^3}(3t^2+1)+\sqrt{2t}(3t^2-1)\big)dt=\sqrt2\int_0^1(3t^{7/2}+t^{3/2}+3t^{5/2}-t^{1/2})dt=\Big(\frac69+\frac25+\frac67-\frac23\Big)\sqrt2=\frac{44}{35}\sqrt2.$$

11. Дати интеграл је једнак

$$\int_0^\pi(xy'+yz'+zx')dt=\int_0^\pi(\cos^2t+\sin t-t\sin t)dt=\frac\pi2+2-\int_0^\pi t\sin t\,dt=\frac\pi2+2-(\sin t-t\cos t)\Big|_0^\pi=2-\frac\pi2.$$

12. Тражени интеграл је збир интеграла по дужима AB, BC и CA.

– Од A до B: параметризација дужи је $(x,y,z)=A+t\cdot\overrightarrow{AB}=(t,2t,-t)$ и $(dx,dy,dz)=(1,2,-1)$, па је

$$I_{AB}=\textstyle\int_0^1[(3t)^2+2(2t)^2-t^2]dt=\frac{16}{3}.$$

– Од B до C: параметризација дужи је $(x,y,z)=B+t\cdot\overrightarrow{BC}=(1+t,2-3t,-1+2t)$ и $(dx,dy,dz)=(1,-3,2)$, па је
$$I_{BC}=\int_0^1[(5t-3)^2-3(2-t)^2+2(4t-1)^2]dt=0.$$

– Од C до A: параметризација дужи је $(x,y,z)=C+t\cdot\overrightarrow{CA}=(2-2t,-1+t,1-t)$ и $(dx,dy,dz)=(-2,1,-1)$, па је
$$I_{CA}=\int_0^1[-2(2-2t)^2+(1-t)^2-(3-3t)^2]dt=-\tfrac{16}{3}.$$

Резултат је $I=I_{AB}+I_{BC}+I_{CA}=0$.

13. По услову задатка је $y^2+z^2=1$, па можемо увести поларне координате: $x=\cos^2 t$, $y=\cos t$, $z=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$. Тако је
$$dx=-2\cos t\sin t\,dt,\quad dy=-\sin t\,dt,\quad dz=\cos t\,dt,\quad y^2+2z^2=1+\sin^2 t.$$
У тачки A је $t=\frac{pi}{2}$, а у тачки B је $t=0$. Дакле, $I=\int_{\pi/2}^0\frac{-2\sin t\cos t-\sin t+\cos t}{1+\sin^2 t}=I_1+I_2$, где су
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin t-1)\cos t\,dt}{1+\sin^2 t}\dashv_{\substack{u=\sin t\\ du=\cos t\,dt}}\models\int_0^1\frac{2u-1}{1+u^2}=\ln 2-\frac{\pi}{4},$$
$$I_2=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{1+\sin^2 t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,dt}{2-\cos^2 t}\dashv_{\substack{v=\cos t\\ dv=-\sin t\,dt}}\models\int_0^1\frac{dv}{2-v^2}=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.$$

14. Да бисмо параметризовали криву $\mathcal{C}$ (елипсу), допунимо једначину до квадрата и поставимо неку врсту поларних координата: $\frac{3}{4}x^2+(\frac{1}{2}x+y)^2=1$ и одатле $\frac{\sqrt{3}}{2}x=\cos t$ и $\frac{1}{2}x+y=\sin t$, тј.
$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t,\quad y=\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\,dt,\quad dy=\Big(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\Big)\,dt.$$
У тачкама A и B је $t=\frac{\pi}{6}$, односно $t=\frac{\pi}{2}$, па добијамо
$$\begin{aligned}I&=\textstyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\big(\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^2 t\sin t+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t(\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t)(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t)\big)dt\\&=\textstyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\big(\frac{4}{\sqrt{3}}\cos^2 t\sin t+\frac{4}{3}\sin^2 t\cos t-\frac{2}{3}\cos t\big)dt=\big(-\frac{4}{3\sqrt{3}}\cos^3 t+\frac{4}{9}\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\big)\big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

15. Користимо смену $x=z\cos t$ и $y=z\sin t$. Из услова $y^2+z^2=z^2(1+\sin^2 t)=1$ добијамо
$$x=\frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}},\quad y=\frac{\sin t}{\sqrt{1+\sin^2 t}},\quad z=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}},$$
тако да је
$$dx=\frac{-2\sin t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}},\quad dy=\frac{\cos t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}},\quad dz=\frac{-\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin^2 t)^{3/2}}.$$
Тражени интеграл постаје $I=\int_0^{2\pi}f(t)dt$, где је $f(t)=\frac{-2+\cos t-\sin t}{1+\sin^2 t}$. Како је $f(t)+f(t+\pi)=\frac{-4}{1+\sin^2 t}$, имамо $I=\int_0^\pi f(t)dt+\int_\pi^{2\pi}f(t)dt=\int_0^\pi(f(t)+f(t+\pi))dt=-4\int_0^\pi\frac{dt}{1+\sin^2 t}$. Последњи интеграл израчунавамо сменом $u=\mathrm{ctg}t$: тада је $\frac{dt}{1+\sin^2 t}=-\frac{\sin^2 t}{1+\sin^2 t}du=-\frac{du}{2+u^2}$, па је
$$I=4\int_\infty^{-\infty}\frac{du}{2+u^2}=-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\,\Big|_{-\infty}^{\infty}=-2\sqrt{2}\pi.$$

16. Дати интеграл не зависи од пута ако је векторско поље $\vec{A}=(P,Q,R)$ потенцијално, где је $P=x^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$, $Q=y^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$ и $R=z^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$.
Ротор је $\mathrm{rot}\vec{A}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$, а при томе је
$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=4\alpha y^3z^3(x^4+y^4+z^4)^{\alpha-1}-4\alpha y^3z^3(x^4+y^4+z^4)^{\alpha-1}=0,\quad\text{итд.}$$
Дакле, $\mathrm{rot}\,\vec{A}=\vec{0}$ за све α, тј. поље је увек потенцијално.

17. Ротор векторског поља $\vec{A}=\big(e^{x-y}(xy+y+z^2),-e^{x-y}(xy-x+z^2),2ze^{x-y}\big)$ је нула, па интеграл не зависи од пута. Нађимо његов потенцијал U.
- $U'_z=2ze^{x-y}\Rightarrow U=z^2e^{x-y}+A(x,y)$;
- $U'_x=z^2e^{x-y}+A'_x\Rightarrow A'_x=(x+1)ye^{x-y}\Rightarrow A=xye^{x-y}+B(x)$, тј. $U=(xy+z^2)e^{x-y}+B(x)$;
- $U'_y=-e^{x-y}(xy-x+z^2)\Rightarrow B'_x=0$, тј. $B=\mathrm{const}$.

Према томе, $U=(xy+z^2)e^{x-y}+\mathrm{const}$. Тражени интеграл је једнак $U(1,1,1)-U(0,0,0)=2$.