Пример првог колоквијума из Математике 1 - смене 6 и 7

1. Решити матричну једначину $M = X^{-1}N - 2E$, где је E јединична матрица и дате су матрице
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Дискусијом по реалном параметру a решити систем једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & (a-1)y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & az & = & 2\ . \\ x & + & 3y & + & z & = & a. \end{array}$$

3. Одредити раван π која садржи тачку $A(-3,0,3)$, сече раван $\alpha : x+z=1$ под углом од 30° и сече раван $\beta : -x+y+z=12$ под правим углом.

4. Свести криву другог реда $xy - 5x + 7y + 9 = 0$ на канонски облик.

Решења

1. Решење матричне једначине је $X = NA^{-1}$, где је
$$A = M + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -8 & -7 \\ 7 & -6 & -9 \\ -6 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

2. Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Рачунамо детерминанте
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 6a + 5 = (a+1)(a+5),$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -a+1 & 2 \\ 2 & -1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 + 7a + 9 = (a+1)(a^2 - 2a + 9),$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a + 1 = (a+1)(2a-1),$$
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 5a - 6 = (a+1)(a-6).$$

   (1) Ако је $\Delta \neq 0$, тј. ако је $a \neq -1$ и $a \neq -5$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = \left(\frac{a^2-2a+9}{a+5}, \frac{2a-1}{a+5}, \frac{a-6}{a+5}\right)$.

   (2) Ако је $a = -5$ систем нема решења.

(3) Ако је $a=-1$ систем решавамо Гаусовим методом елиминације

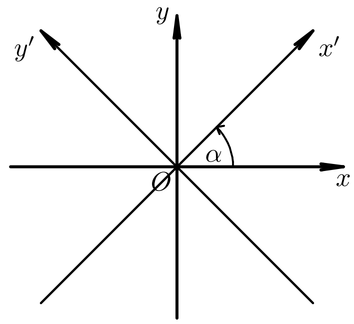
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{V_2\leftrightarrow V_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{V_2-2V_1\\ V_3-V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{4} & 0 & -3\\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{array}\right] \overset{V_3-V_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{4} & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Можемо узети да је променљива z слободна: $z=t, t\in\mathbb{R}$. Из друге једначине је $y=-\frac{3}{4}$, а из прве $x=\frac{5}{4}-t$. Дакле, систем је (једноструко) неодређен и његово решење је $(x,y,z)=\left(\frac{5}{4}-t,-\frac{3}{4},t\right), t\in\mathbb{R}$.

3. Нека су $\vec{n}_\alpha=(1,0,1)$, $\vec{n}_\beta=(-1,0,1)$ и $\vec{n}_\pi=(a,b,c)$ вектори нормала на равни α, β и π редом. Из услова задатка је $\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\beta=0$. Дакле, $\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-a+b+c=0$. Елимицијом параметра b из претходног система (за $c\neq 0$) добијамо једначину $2(a/c)^2-5(a/c)+2=0$, па је $a/c=2$ или $a/c=1/2$. Бирањем $c=1$ из првог решења добијамо $\vec{n}_\pi=(2,1,1)$, док бирањем $a=1$ из другог решења добијамо $\vec{n}_\pi=(1,-1,2)$. Дакле, раван π је дата једначином $2x+y+z+3=0$ или $x-y+2z-3=0$.

4. Општа једначина криве другог реда је $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, а угао ротације је $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}$. Овде је $A=C=0$ и $B=\frac{1}{2}$, па је $\mathrm{tg}2\alpha=\infty$ и можемо узети да је $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, тј. $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Формуле ротације су $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$ и $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, где је Oxy стари координатни систем, а $Ox'y'$ нови координатни систем (добијен ротацијом старог за угао α). Заменом формула ротације $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$ и $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$ у полазној једначини добијамо



$$\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y')-\frac{5}{\sqrt{2}}(x'-y')+\frac{7}{\sqrt{2}}(x'+y')+9=0,$$

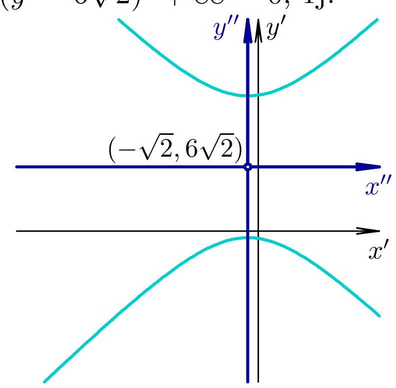
одакле је

$$x'^2+2\sqrt{2}x'-y'^2+12\sqrt{2}y'+18=0.$$

Ова једначина се може написати у облику $(x'+\sqrt{2})^2-(y'-6\sqrt{2})^2+88=0$, тј.

$$\frac{(y'-6\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$

Видимо да је дата крива хипербола са центром у тачки $(-\sqrt{2},6\sqrt{2})$ (у координатном систему $Ox'y'$) и да су формуле транслације $x''=x'+\sqrt{2}$ и $y''=y'-6\sqrt{2}$. Дакле, канонски облик је



$$\frac{y''^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{x''^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$

Одговарајуће трансформације координата су

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}-y''-6\sqrt{2}\right)=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}-7,$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}+y''+6\sqrt{2}\right)=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}+5.$$

Рада Мутавџић Ђукић