Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Matematika 3 (1. grupa)

1. a) Ukoliko izrazimo y''', imamo $y'''(x) = e^{-2x}$ i stoga

$$\begin{aligned}
y'' &= \int y'''\,dx = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1,\\
y' &= \int y''\,dx = \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1\right)\,dx = \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2,\\
y &= \int y'\,dx = \int \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2\right)\,dx = -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.
\end{aligned}$$

b) U ovom slučaju nije moguće eksplicitno izraziti y'' preko x, tako da smo prinudjeni da parametrizujemo: $y'' = t,\ \sin t + t = x$, odakle je $dx = (\cos t + 1)\,dt$ i onda (analogno kao u delu pod a))

$$\begin{aligned}
y' &= \int y''\,dx = \int t(\cos t + 1)\,dt = t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1,\\
y &= \int y'\,dx = \int \left(t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(\cos t + 1)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int t^2\cos t + \int t\,(\sin t\cos t + \sin t)\,dt + \int \cos^2 t\,dt + (C_1+1)\int \cos t\,dt + \int\left(\frac{1}{2}t^2 + C_1\right)dt\\
&= \frac{1}{2}t^2\sin t - \int t\sin t\,dt + \int t\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t\right)dt + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + (C_1+1)\sin t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2\\
&= \dots
\end{aligned}$$

Podrazumeva se da su studenti upućeni u računanje ovakvih integrala uz pomoć parcijalne integracije.

2. a) Iako se zadatak može rešiti sličnim postupkom kao deo pod b), navodimo kraće rešenje.

Za odgovarajuće funkcije argumenta x, $y = y(x)$, $y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = y''(x) = \dfrac{dy'}{dx}$, leva strana date jednačine predstavlja prvi izvod $F'(x)$ složene funkcije

$$F(x) = \ln(y'(x)) - \ln\left(1 + (y(x))^2\right) = \ln\left(\frac{y'(x)}{1 + (y(x))^2}\right),$$

jer je

$$\left[\ln(y'(x)) - \ln\left(1 + (y(x))^2\right)\right]' = \frac{y''(x)}{y'(x)} - \frac{2y(x)\,y'(x)}{1 + (y(x))^2}.$$

Dakle, $F'(x) = 0$ i $F(x) = const$, odnosno

$$\frac{y'(x)}{1 + (y(x))^2} = C_1,\quad \int \frac{dy}{1+y^2} = C_1\,dx,\ \operatorname{arctg} y = C_1\,x + C_2$$

b) Nakon standardne smene $y' = z = z(y)$, koja se uvodi u ovakvim zadacima (diferencijalne jednačine 2. reda čija formulacija ne zavisi od x), imamo

$$y'' = y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = z' \cdot z,$$

(pri čemu se $y'' = z' \cdot z$ koristi kao gotov rezultat) i data jednačina postaje

$$2z^2 - yzz' = 0, \; z(2z - yz') = 0,$$

gde imamo dva slučaja.

1) $z = 0$, tj. y=0, odakle direktno proističe rešenje $y \equiv const$.

2) $2z - yz' = 0$, odakle razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{2}{y} = \frac{z'}{z}, \; \frac{2dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

odnosno $-2\ln y + \ln z = -\ln(y^{-2}) + \ln y' = const$ nakon integracije. Dalje,

$$y^{-2}y' = C_1, \; y^{-2}\,dy = C_1\,dx$$

i nakon integracije.

$$-\frac{1}{y} = C_1x + C_2, \; y = -\frac{1}{C_1x + C_2}$$

Ovo je opšte rešenje polazne jednačine. Jasno je da se dobijeno rešenje $y \equiv const$ dobija iz opšteg za $C_1 = 0$ i stoga ono predstavlja partikularno rešenje.

Uslov $y(0) = 1$ se svodi na $C_2 = -1$, dok iz $y^{-2}y' = C_1$ (ili diferenciranjem $y = \frac{1}{C_1x + C_2}$) dobijamo

$$y' = \frac{C_1}{((C_1x + C_2))^2},$$

pa se $y'(1) = 0$ svodi na $C_1 = 0$ Dakle, traženo partikularno rešenje glasi:

$$y_p(x) = 1.$$

3. Čim je zadatak ovako formulisan, jasno je da jedno rešenje treba da "izvariramo", a drugo da dobijemo preko prvog uz pomoć Abelove formule. Zamenjujući u odgovarajuću homogenu jednačinu $y = x^p$, $y' = px^{p-1}$, $y'' = p(p-1)x^{p-2}$, dobijamo

$$p(p-1)x^{p-1} + 2(x+1)px^{p-1} + 2x^p = 0, \; (p^2 + p)x^{p-1} + (2p+2)x^p = 0$$

Poslednje je moguće samo za $p^2 + p = 0$ i $2p + 2 = 0$, odnosno $p = -1$.

Dakle, $y_{h1} = \frac{1}{x}$ i sada, nakon zapisivanja u " default"obliku odgovarajuće homogene jednačine koja odgovara polaznoj jednačini:

$$y_h'' + \frac{2(x+1)}{x} y_h' + \frac{2}{x} = 0$$

i primene Abelove formule, dobijamo

$$y_{2h} = \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2(x+1)}{x}\,dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx.$$

Imamo

$$\int \frac{2(x+1)}{x}\,dx = \int \left(2 + \frac{2}{x}\right) dx = \int 2\,dx + 2\int \frac{dx}{x} = 2x + 2\ln x,$$

$$e^{-(2x+2\ln x)} = e^{-2x} \cdot e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} e^{-2x}$$

i

$$y_{2h} = \frac{1}{x} \int \frac{\frac{1}{x^2} e^{-2x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{x} \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2x} e^{-2x}.$$

Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nabodemo u obliku $y = const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nabodemo u obliku $y = ax + b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y = ax^2 + bx + c$, imamo $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$, tj.

$$x \cdot 2a + 2(x+1)(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = x^2+x+1,\ 6ax^2 + (6a+4b)x + 2b + 2c = x^2+x+1,$$

odakle dobijamo $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$ i $c = \frac{1}{2}$.

Sada je opšte rešenje $y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{2}$.

4. Uvodeći $x = e^t$ $(t = \ln x)$, $y' = \frac{y_t'}{x}$, $y'' = \frac{y_t'' - y_t'}{x^2}$, jednačina postaje

$$y_t'' - y_t' - y_t' + y = e^t - \cos t,\ y_t'' - 2y_t' + y = e^t - \cos t.$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, odnosno $(\lambda - 1)^2 = 0$, što znači da imamo jednu nulu $\lambda = 1$ višestrukosti $s = 2$. Stoga je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednčine

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t,$$

dok partikularna rešenja koja ispunjavaju $y_{p1}'' - 2y_{p1}' + y_{p1} = e^t$ ($\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 + i\beta_1 = 1$ jeste koren karakteristične jednačine višestrukosti $s_1 = 2$) i $y_{p2}'' - 2y_{p2}' + y_{p2} = -\cos t$ ($\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 + i\beta_1 = i$ nije koren karakteristične jednačine, dakle višestrukost $s_2 = 0$) tražimo u oblicima $y_{p1} = t^2 A e^t = A t^2 e^t$ i $y_{p2} = A\cos t + B\sin t$.

U prvom slučaju je $y_{p1}' = A(t^2+2t)e^t$ i $y_{p1}'' = A(t^2+4t+2)e^t$ i

$$y_{p1}'' - 2y_{p1}' + y_{p1} = 2Ae^t,$$

odakle dobijamo $2Ae^t = e^t$ i $A = \dfrac{1}{2}$.
U drugom slučaju je $y_{p2}' = -A\sin t + B\cos t$ i $y_{p2}'' = -A\cos t - B\sin t$ i

$$y_{p2}'' - 2y_{p2}' + y_{p2} = 2A\sin t - 2B\cos t,$$

odakle dobijamo $-2B = -1$, $B = \dfrac{1}{2}$ i $A = 0$. Dakle opšte rešenje je

$$y = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{2}\cos t = C_1x + C_2x\ln x + \frac{1}{2}x\left(\ln x\right)^2 + \frac{1}{2}\sin\left(\ln x\right).$$

5. U normalnom obliku dati sistem glasi

$$\frac{dx}{dt} = 3z - 2y,\ \frac{dy}{dt} = 2x - 4z,\ \frac{dz}{dt} = 4y - 3x.$$

Na osnovu osobina proporcije, za bilo koje realne brojeve α, β, γ važi

$$\begin{aligned}\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = &\ \left(\alpha(3z-2y) + \beta(2x-4z) + \gamma(4y-3x)\right)\,dt\\ = &\ \left((2\beta-3\gamma)x + (4\gamma-2\alpha)y + (3\alpha-4\beta)z\right)\,dt.\end{aligned}$$

Poslednji izraz je jednak nuli kada je $2\beta = 3\gamma$, $4\gamma = 2\alpha$ i $3\alpha = 4\beta$, što će važiti kad god je $\beta = \dfrac{3}{2}\gamma$ i $\alpha = 2\gamma$, eto npr. za $\gamma = 2$, $\beta = 3$, $\alpha = 4$. Dakle, biće

$$4\,dx + 3\,dy + 2\,dz = 0,$$

odakle integracijom dobijamo

$$\Phi_1(x,y,z) = 4x + 3y + 2z = C_1.$$

Slično, za bilo koje realne brojeve α, β, γ važi

$$\begin{aligned}\alpha x\,dx + \beta y\,dy + \gamma z\,dz = &\ \left(\alpha x(3z-2y) + \beta y(2x-4z) + \gamma z(4y-3x)\right)\,dt\\ = &\ \left((2\beta-2\alpha)xy + (4\gamma-4\beta)yz + (3\alpha-3\gamma)zx\right)\,dt.\end{aligned}$$

Poslednji izraz je jednak nuli kada je $\alpha = \beta = \gamma$, eto npr. kad su svi jednaki 1. Dakle, biće

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

odakle integracijom dobijamo

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Diferenciranjem prve jednačine datog sistema dobijamo

$$\ddot{x} = 3\dot{z} - 2\dot{y}$$

Ako u prethodni izraz uvrstimo $\dot{y}$ i $\dot{z}$

$$\ddot{x} = 3(4y - 3x) - 2(2x - 4z) = -13x + 12y + 8z,$$

diferenciranje pretdodnog izraza daje

$$\dddot{x} = -13\dot{x} + 12\dot{y} + 8\dot{z} = -13(3z - 2y) + 12(2x - 4z) + 8(4y - 3x) = 58y - 87z,$$

Dakle, imamo sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= & -2y & \quad +3z \\ \ddot{x} &= -13x & +12y & \quad +8z \\ \dddot{x} &= & +58y & \quad -87z. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa 29 i dodajmo drugoj (cilj je eliminisati y), druga nam čak ni ne treba. Dobijamo

$$\dddot{x} + 29\dot{x} = 0. \tag{1}$$

Rešenja zadataka sa Prvog kolokvijuma iz predmeta Matematika 3 (2. grupa)

1. a) Ukoliko izrazimo y''', imamo $y'''(x) = -e^{-3x}$ i stoga

$$
\begin{aligned}
y'' &= \int y'''\,dx = -\int e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{-3x} + C_1,\\
y' &= \int y''\,dx = \int \left(\frac{1}{2}e^{-3x} + C_1\right)\,dx = -\frac{1}{6}e^{-2x} + C_1 x + C_2,\\
y &= \int y'\,dx = int \left(\frac{1}{6}e^{-2x} + C_1 x + C_2\right)\,dx = \frac{1}{8}e^{-2x} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}
$$

b) U ovom slučaju nije moguće eksplicitno izraziti y'' preko x, tako da smo prinudjeni da parametrizujemo: $y'' = t$,
$cost - t = x$, odakle je $dx = -(\sin t + 1)\,dt$ i onda (analogno kao u delu pod a))

$$
\begin{aligned}
y' &= \int y''\,dx = -\int t(\sin t + 1)\,dt = t\cos t - \sin t - \frac{t^2}{2} + C_1,\\
y &= \int y'\,dx = -\int \left(t\cos t - \sin t - \frac{t^2}{2} + C_1\right)(\sin t + 1)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int t^2 \sin t - \int t\,(\sin t\cos t + \cos t)\;dt + \int \sin^2 t\,dt - (C_1 - 1)\int \sin t\,dt + \int \left(\frac{1}{2}t^2 - C_1\right)\;dt\\
&= -\frac{1}{2}t^2\cos t + \int t\cos t\,dt - \int t\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\right)\;dt - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + (C_1 - 1)\cos t + \frac{t^3}{6} - C_1 t +\\
&= \dots
\end{aligned}
$$

Podrazumeva se da su studenti upućeni u računanje ovakvih integrala uz pomoć parcijalne integracije.

2. a) Iako se zadatak može rešiti sličnim postupkom kao deo pod b), navodimo kraće rešenje.

Za odgovarajuće funkcije argumenta x, $y = y(x)$, $y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = y''(x) = \dfrac{dy'}{dx}$, leva strana date jednačine predstavlja prvi izvod $F'(x)$ složene funkcije

$$
F(x) = \ln\left(y'(x)\right) + \ln\left(1 + (y(x))^2\right) = \ln\left(\left(1 + (y(x))^2\right)y'(x)\right),
$$

jer je

$$
\left[\ln\left(y'(x)\right) + \ln\left(1 + (y(x))^2\right)\right]' = \frac{y''(x)}{y'(x)} + \frac{2y(x)\,y'(x)}{1 + (y(x))^2}.
$$

Dakle, $F'(x) = 0$ i $F(x) = const$, odnosno

$$
\left(1 + (y(x))^2\right)y'(x) = C_1,\ \int \left(1 + y^2\right)dy = C_1\,dx,\ \frac{y^3}{3} + y = C_1\,x + C_2
$$

b) Nakon standardne smene $y' = z = z(y)$, koja se uvodi u ovakvim zadacima (diferencijalne jednačine 2. reda čija formulacija ne zavisi od x), imamo

$$y'' = y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = z' \cdot z,$$

(pri čemu se $y'' = z' \cdot z$ koristi kao gotov rezultat) i data jednačina postaje

$$2z^2 + yzz' = 0, \;\; z(2z + yz') = 0,$$

gde imamo dva slučaja.

1) $z = 0$, tj. y=0, odakle direktno proističe rešenje $y \equiv const$.

2) $2z + yz' = 0$, odakle razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{2}{y} = -\frac{z'}{z}, \;\; \frac{2dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0,$$

odnosno $2\ln y + \ln z = \ln(y^2) + \ln y' = const$ nakon integracije. Dalje,

$$y^2 y' = C_1, \;\; y^2\, dy = C_1\, dx$$

i nakon integracije.

$$\frac{y^3}{3} = C_1 x + C_2$$

Ovo je opšte rešenje polazne jednačine. Jasno je da se dobijeno rešenje $y \equiv const$ dobija iz opšteg za $C_1 = 0$ i stoga ono predstavlja partikularno rešenje.

Uslov $y(0) = 0$ se svodi na $C_2 = 0$, dok iz $y^2 y' = C_1$ (ili diferenciranjem $y = \sqrt[3]{3(C_1 x + C_2)}$) dobijamo

$$y' = \frac{C_1}{(3(C_1 x + C_2))^{2/3}},$$

pa se $y'(1) = 1$ svodi na ($C_2 = 0$)

$$\frac{C_1}{(3C_1)^{2/3}} = 1, \;\; C_1 = 9.$$

Dakle, traženo partikularno rešenje glasi:

$$y_p(x) = 3x^{1/3}.$$

3. Čim je zadatak ovako formulisan, jasno je da jedno rešenje treba da "izvariramo", a drugo da dobijemo preko prvog uz pomoć Abelove formule. Zamenjujući u odgovarajuću homogenu jednačinu $y = x^p$, $y' = px^{p-1}$, $y'' = p(p-1)x^{p-2}$, dobijamo

$$p(p-1)x^{p-1} + 2(x+1)px^{p-1} + 2x^p = 0, \;\; (p^2 + p)x^{p-1} + (2p+2)x^p = 0$$

Poslednje je moguće samo za $p^2+p=0$ i $2p+2=0$, odnosno $p=-1$.

Dakle, $y_{h1}=\dfrac{1}{x}$ i sada, nakon zapisivanja u " default" obliku odgovarajuće homogene jednačine koja odgovara polaznoj jednačini:

$$y_h''+\frac{2(x+1)}{x}y_h'+\frac{2}{x}=0$$

i primene Abelove formule, dobijamo

$$y_{2h}=\frac{1}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{2(x+1)}{x}\,dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx.$$

Imamo

$$\int\frac{2(x+1)}{x}\,dx \;=\int\left(2+\frac{2}{x}\right)dx=\int 2\,dx+2\int\frac{dx}{x}=2x+2\ln x,$$

$$e^{-(2x+2\ln x)}=e^{-2x}\cdot e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}e^{-2x}$$

i

$$y_{2h}=\frac{1}{x}\int\frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{x}\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2x}e^{-2x}.$$

Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nabodemo u obliku $y=const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nabodemo u obliku $y=ax+b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y=ax^2+bx+c$, imamo $y'=2ax+b$, $y''=2a$, tj.

$$x\cdot 2a+2(x+1)(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2-x+1,\;\; 6ax^2+(6a+4b)x+2b+2c=x^2-x+1,$$

odakle dobijamo $a=\dfrac{1}{6}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ i $c=1$.

Sada je opšte rešenje $y=C_1\dfrac{1}{x}+C_2\dfrac{1}{x}e^{-2x}+\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$.

4. Uvodeći $x=e^t$ $(t=\ln x)$, $y'=\dfrac{y_t'}{x}$, $y''=\dfrac{y_t''-y_t'}{x^2}$, jednačina postaje

$$y_t''-y_t'+y_t'+y=e^t-\cos t,\;\; y_t''+y=e^t-\cos t.$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi $\lambda^2+1=0$, odnosno $\lambda^2+1=0$, što znači da imamo konjugovano-kompleksne nule $\lambda_{1,2}=\pm i$ višestrukosti $s=1$. Stoga je opšte rešenje odgovarajuće homogene jednčine

$$y_h(t)=C_1\cos t+C_2\sin t,$$

dok partikularna rešenja koja ispunjavaju $y_{p1}''+y_{p1}=e^t$ ($\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\alpha_1+i\beta_1=1$ nije koren karakteristične jednačine, dakle višestrukost $s_1=0$) i $y_{p2}''+y_{p2}=-\cos t$ ($\alpha_2=1$, $\beta_1=1$, $\alpha_1+i\beta_1=i$ jeste koren karakteristične jednačine višestrukosti $s_2=1$) tražimo u oblicima $y_{p1} = Ae^t$ i $y_{p2} = t(A\cos t + B\sin t)$.

U prvom slučaju je $y'_{p1} = y''_{p1} = Ae^t$ i

$$y''_{p1} + y_{p1} = 2Ae^t,$$

odakle dobijamo $2Ae^t = e^t$ i $A = \frac{1}{2}$.

U drugom slučaju je $y'_{p2} = t(-A\sin t + B\cos t) + (A\cos t + B\sin t)$ i $y''_{p2} = -A\sin t + B\cos t + t(-A\cos t - B\sin t) - A\sin t + B\cos t$ i

$$y''_{p2} + y_{p2} = -2A\sin t + 2B\cos t,$$

odakle dobijamo $2B = -1$, $B = -\frac{1}{2}$ i $A = 0$. Dakle opšte rešenje je

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t\sin t = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln x\sin(\ln x).$$

5. U normalnom obliku dati sistem glasi

$$\frac{dx}{dt} = 3z - 4y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2z,\ \frac{dz}{dt} = 2y - 3x.$$

Na osnovu osobina proporcije, za bilo koje realne brojeve α, β, γ važi

$$\begin{aligned}\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz &= (\alpha(3z - 4y) + \beta(4x - 2z) + \gamma(2y - 3x))\ dt\\ &= ((4\beta - 3\gamma)x + (2\gamma - 4\alpha)y + (3\alpha - 2\beta)z)\ dt.\end{aligned}$$

Poslednji izraz je jednak nuli kada je $4\beta = 3\gamma$, $2\gamma = 4\alpha$ i $3\alpha = 2\beta$, što će važiti kad god je $\beta = \frac{3}{4}\gamma$ i $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, eto npr. za $\gamma = 4$, $\beta = 3$, $\alpha = 2$. Dakle, biće

$$2\,dx + 3\,dy + 4\,dz = 0,$$

odakle integracijom dobijamo

$$\Phi_1(x, y, z) = 2x + 3y + 4z = C_1.$$

Slično, za bilo koje realne brojeve α, β, γ važi

$$\begin{aligned}\alpha x\,dx + \beta y\,dy + \gamma z\,dz &= (\alpha x(3z - 4y) + \beta y(4x - 3z) + \gamma z(2y - 3x))\ dt\\ &= ((4\beta - 4\alpha)xy + (3\gamma - 3\beta)yz + (3\alpha - 3\gamma)zx)\ dt.\end{aligned}$$

Poslednji izraz je jednak nuli kada je $\alpha = \beta = \gamma$, eto npr. kad su svi jednaki 1. Dakle, biće

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

odakle integracijom dobijamo

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Diferenciranjem prve jednačine datog sistema dobijamo

$$\ddot{x} = 3\dot{z} - 4\dot{y}$$

Ako u prethodni izraz uvrstimo $\dot{y}$ i $\dot{z}$

$$\ddot{x} = 3(2y - 3x) - 4(4x - 2z) = -25x + 6y + 8z,$$

diferenciranje prethodnog izraza daje

$$\dddot{x} = -25\dot{x} + 6\dot{y} + 8\dot{z} = -25(3z - 4y) + 6(4x - 2z) + 8(2y - 3x) = 116y - 87z,$$

Dakle, imamo sistem

$$\begin{array}{rlll} \dot{x} & = & -4y & +3z \\ \ddot{x} & = -25x & +6y & +8z \\ \dddot{x} & = & 116y & -87z. \end{array}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa 29 i dodajmo trećoj (cilj je eliminisati y, druga nam čak ni ne treba). Dobijamo

$$\dddot{x} + 29\dot{x} = 0. \tag{2}$$

Asistent: Aleksandar Pejčev