Решења задатака са Другог колоквијума из Математике 1 одржаног 28.11.2016

1. група

1. Параметарске једначине праве p можемо наћи тако што у систему $3x + y - 2z - 6 = 0, 4x - y + 3z = 0$ узмемо да је $x = t, t \in \mathbb{R}$. Тада је $y = -17t + 18$ и $z = -7t + 6$, па је правац праве p једнак $\vec{p} = (1, -17, -7)$.

   Нормала на раван α је нормална на векторе $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 2)$ и $\vec{p}$, па је паралелна векторском производу њихових праваца, тј.

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -17 & -7 \end{vmatrix} = 2(5, -3, 8).$$

   Раван α садржи нпр. тачку A, па је на основу претходног њена једначина $5(x-1) - 3(y-0) + 8(z+1) = 0$, односно $\alpha : 5x - 3y + 8z + 3 = 0$.

   Да бисмо нашли симетричну праву правој p у односу на раван α, прво проверавамо да ли је $p||\alpha$, односно да ли је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Како је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = (1, -17, -7) \cdot (5, -3, 8) = 5 + 51 - 56 = 0$, права p и раван α су паралелне. Дакле, правац тражене праве ће бити исти као правац праве p.

   Нађимо сада симетричну тачку произвољној тачки праве p у односу на α. Ако у параметарским једначинама праве p узмемо да је $t = 1$ добијамо тачку $P(1, 1, -1)$ са праве p. Параметарске једначине нормале n на раван α кроз тачку P су $n : x = 5t + 1, y = -3t + 1, z = 8t - 1, t \in \mathbb{R}$, па се продор S праве n кроз раван α добија из једначине праве n за вредност t која је решење једначине $5(5t + 1) - 3(-3t + 1) + 8(8t - 1) + 3 = 0$, тј. $t = 3/98$. Координате тачке S су $(113/98, 89/98, -37/49)$.

   Тачка S је средиште дужи PP', где је P' симетрична тачка тачки P у односу на раван α. Следи да су координате тачке S аритметичка средина координата P и P', па је $P' = 2S - P = (64/49, 40/49, -25/49)$.

   Коначно, једначина тражене праве је

$$p' : \frac{x - 64/49}{1} = \frac{y - 40/49}{-17} = \frac{z + 25/49}{-7}.$$

2. Општа једначина криве другог реда је $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ и за задату криву је $A = 2, B = 3/2, C = -2, D = -3, E = -2, F = 6$. Како су одговарајуће детерминанте

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & -3 \\ 3/2 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0,$$

   одмах закључујемо да се ради о хиперболи. Тангенс угла за који треба да ротирамо полазни координатни ситем (x, y) да бисмо изгубили члан $x'y'$ у једначини криве у новом координатном систему (x', y') налазимо из формуле $B\text{tg}^2\alpha + (A-C)\text{tg}\alpha - B = 0$:

$$\frac{3}{2}\text{tg}^2\alpha + 4\text{tg}\alpha - \frac{3}{2} = 0,$$

односно $\text{tg}\alpha = 1/3$ или $\text{tg}\alpha = -3$. Ако изаберемо нпр. $\text{tg}\alpha = 1/3$, даље налазимо (логично је да бирамо оштар угао)

$$\sin\alpha = \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\text{tg}\alpha} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Формуле ротације $(x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$ су $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'-y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'+3y')$ и њиховом заменом у полазну једначину добијамо

$$2\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)^2 + 3\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}} - 2\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)^2 - 6\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}} - 4\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}} + 6 = 0,$$

односно, након сређивања

$$25x'^2 - 22\sqrt{10}x' - 25y'^2 - 6\sqrt{10}y' + 60 = 0.$$

Да бисмо извршили транслацију, претходну једначину напишимо у облику

$$25\left(x'^2 - \frac{22}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}x'\right) - 25\left(y'^2 + \frac{6}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}y'\right) + 60 = 0,$$

односно

$$25\left(x' - \frac{11}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 - 25\left(\frac{11}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 - 25\left(y' + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + 25\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + 60 = 0.$$

Формуле транслације су $x'' = x' - \frac{11}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y'' = y' + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}$, па једначина криве постаје

$$25y''^2 - 25x''^2 = \frac{76}{5}, \text{ тј.} \quad \frac{y''^2}{76/125} - \frac{x''^2}{76/125} = 1,$$

што је једначина хиперболе.

3. Једначина нормале на криву $y = f(x)$ и тачки (x_0, y_0) $(y_0 = f(x_0))$ је

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Прво налазимо извод функције y која дефинише дату криву

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\ln^2\sqrt{x-2}}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\ln^2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2}\cdot 2\ln\sqrt{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\ln^4(x-2)} \\ &= \frac{\ln\sqrt{x-2} - 2}{2\sqrt{x-2}\ln^3(x-2)}. \end{aligned}$$

Даље је $y(6) = \dfrac{2}{\ln^2 2}$ и $y'(6) = \dfrac{\ln 2 - 2}{4\ln^3 2}$, па је једначина нормале у тачки $\left(6, \dfrac{2}{\ln^2 2}\right)$

$$y - \frac{2}{\ln^2 2} = \frac{4\ln^3 2}{2 - \ln 2}(x - 6).$$

4. Двоструком применом Лопиталовог правила добијамо (**увек претходно проверити да ли су испуњени услови за његову примену**)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos^2 x(-\sin x)}{\sin 2x + 2x\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{\sin 2x + 2x\cos 2x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x}{2\cos 2x + 2\cos 2x - 4x\sin 2x} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Обратити пажњу на то како је део $\cos^2 x$, који тежи 1 кад x тежи 0 одмах уклоњен из одговарајућег производа након прве примене Лопиталовог правила, што је врло логичан корак у циљу смањења обима посла. **Ово сме да се уради само ако се цео бројилац или цео именилац множи изразом чија је гранична вредност под датим околностима коначна и различита од 0.**

5. Дата функција је дефинисана ако и само ако је $\frac{x^3}{x+2} \geq 0$, што ће се дешавати за

$$x \in (-\infty, -2) \bigcup [0, +\infty)$$

Много је битно обратити пажњу на следеће:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x+2}} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{x}{x+2}} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x+2}} = |x|\sqrt{\frac{x}{x+2}},$$

јер за $\frac{x}{x+2}$ знамо да је ненегативно с обзиром на домен, али на знак вредности x се мора итекако пазити. Оваква трансформација нам је потребна ради рачунања лимеса, очито треба (барем иницијално) да раздвојимо случајеве $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Другим речима

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x - x\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}, & x \geq 0, \\ 1 - x + x\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}, & x < -2. \end{cases} \tag{1}$$

Прво испитујемо да ли дата функција има хоризонталну асипмтоту. Очито је $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, те у $+\infty$ дата функција нема хоризонталну асимптоту, док је

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 - \lim_{x\to-\infty}\left(x - x\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) = 1 - \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - \sqrt{\frac{x}{x+2}}\right).$$

Пошто је $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$, последњи лимес је облика "$0 \cdot \infty$" и јесте за решавање преко Лопиталових правила. С обзиром на то да ће x којим се множи заграда ићи у именилац да би се у количнику појавило као $1/x$, има смисла одмах увести смену

$x = 1/t$; биће $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{1+2t}$ (кад $x \to -\infty$, биће $t \to 0-$):

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) = \lim_{t\to 0-} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+2t}}}{t} = \lim_{t\to 0-} \frac{1}{2}(1+2t)^{-3/2}\cdot 2 = 1. \qquad (2)$$

Јасно је да се све време могло писати и само $t \to 0$, а ако бисмо ставили $2t = \epsilon$, добијени резултат би и без Лопиталовог правила био директна последица познатог табличног лимеса

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{(1+\epsilon)^{\alpha}-1}{\epsilon} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

кад је $\alpha = -1/2$. Дакле,

$$1 - \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) = 1-1 = 0,$$

што значи да у $-\infty$ график дате функције има хоризонталну асимптоту $y = 0$ ($x-$оса). Сада одмах знамо да у $-\infty$ не може имати косу асимптоту, док ако у $+\infty$ има косу асимптоту $y = kx + n$, њен коефицијент правца износи

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) = 0 - 1 - 1 = -2.$$

То још увек не значи да постоји коса асимптота, да би постојала $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x)$ мора бити коначан, а он је једнак

$$1 + \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right) = 1+1 = 2,$$

јер је последњи лимес који се појавио опет (2), за који смо након смене $x = 1/t$ констатовали да не зависи од знака аргумента. Дакле, у $+\infty$ график дате функције има косу асимптоту $y = -2x + 2$.

Коначно, потенцијални кандидати за вертикалне аимптоте су границе отворених интервала у домену - у овом случају $x = 0$ и $x = -2$. Како је очигледно $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ (и то у 0 постоји само десни лимес с обзиром на домен), ту нема вертикалне асимптоте, док је

$$\lim_{x\to-2-} f(x) = -\infty$$

(у -2, с обзиром на домен, постоји само леви лимес), што значи да је једина вертикална асимптота дате функције права $x = -2$.

Наставник: Александар Пејчев

Асистент: Рада Мутавџић