ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ дискретан простор вероватноћа. Да се подсетимо, ако кажемо да је простор вероватноћа дискретан, то значи да је скуп Ω највише пребројив, мада ће се у задацима везаним за ову област најчешће радити о коначном скупу исхода. Ω је, као и обично скуп исхода, а $\mathcal{A}$ је фамилија случајних догађаја на скупу исхода Ω. Обратите пажњу на то да се фамилија случајних догађаја не означава са A него са $\mathcal{A}$, а чланови те фамилије се обично означавају са A, B итд. Случајни догађаји су скупови исхода. $\mathcal{A}$ је заправо подскуп скупа $\mathcal{P}(\Omega)$.

Дефиниција: Свака функција $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ зове се случајна величина.

Пример 1: Нека се случајни експеримент састоји из бацања новчића три пута, при чему су вероватноће "писма" и "главе" по $\frac{1}{2}$. Функција која нам говори колико пута је пало писмо при вршењу тог експеримента је једна случајна величина. Дакле $X(PPP) = 3, X(PPG) = 2$ итд.
Скуп вредности случајне величине X се означава са S_X. У нашем примеру то је скуп $\{0, 1, 2, 3\}$.
Пошто су бацања новчића међусобно независна, важи да је

$$p(X = 3) = p(\{PPP\}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8},$$

$$p(X = 2) = p(\{PPG, PGP, GPP\}) = 3\frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$p(X = 1) = p(\{GGP, GPG, PGG\}) = 3\frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$p(X = 0) = p(\{GGG\}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8},$$

Овим је једнозначно одређена расподела случајне величине X и то се записује на следећи начин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Пример 2: Узмимо опет да имамо дискретан простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и нека је $A \in \mathcal{A}$ произвољан случајан догађај. Случајна величина $I_A : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ дефинисана са $I_A(\omega) = 1$ ако $\omega \in A$ и $I_A(\omega) = 0$ ако $\omega \notin A$ зове се индикатор догађаја A. Ако је вероватноћа догађаја A једнака p, онда је

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Пример 3: Биномна случајна величина и биномна расподела са параметрима n и p.

Претпоставимо да вршимо n независних експеримената при чему је вероватноћа успеха у сваком експерименту једнака p, а вероватноћа неуспеха $1 - p = q$.
Скуп могућих исхода овог сложеног екперимента се може представити у облику

$$\Omega_n = \{c_1 c_2 ..., c_n | c_k \in \{0, 1\}\}.$$

Случајна величина $S_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $S_n(c_1 c_2, ..., c_n) = c_1 + c_2 + ... + c_k$ зове се **биномна случајна величина са параметрима n и p.**
За $\omega = c_1 c_2, ...c_n$ је

$$p(\{\omega\}) = p^{c_1+c_2+...+c_n}(1-p)^{n-c_1-c_2-...c_n}$$

Како је укупан број исхода за које је $c_0 + c_1 + ... + c_n = k$, односно број начина да фиксирамо k од n места на којима ће бити 1 (а на осталима 0)- једнак $\binom{n}{k}$, то ће бити

$$p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Приметимо да се S_n може приказати у облику

$$S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n,$$

где је

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

I_k је индикатор успеха у k-том експерименту.

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ И ДИСПЕРЗИЈА ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ

Дефиниција: Нека је случајна величина X дата својом расподелом

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & ... \\ p_1 & p_2 & x_3 & ... \end{array} \right)$$

Математичко очекивање случајне величине X се дефинише на следећи начин:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

ако дати ред конвергира, иначе је вредност EX недефинисана. Ако X узима коначно много вредности, онда је њена расподела облика

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & x_n \end{array} \right),$$

па је вредност

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

увек дефинисана.

Теорема (својства математичког очекивања):

1. $E(cX) = cEX$, $c \in \mathbb{R}$;
2. $E(X+Y) = EX + EY$, где су X и Y случајне величине на истом скупу исхода;

Претпоставља се да су вредности EX и EY дефинисане.
Доказ:

1. Очигледно је.
2. Спровешћемо доказ за случај да се ради о коначном слупу исхода, а расуђивање се може лако пренети и на пребројиве скупове.
   Нека је скуп исхода $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$ и нека су њихове вероватноће $p_1, p_2, ..., p_m$ респективно ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$). Тада лако закључујемо да је

$$EX = \sum_{i=1}^{m} X(\omega_i) p_i$$

$$EY = \sum_{i=1}^{m} Y(\omega_i) p_i$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{m} (X+Y)(\omega_i) p_i = \sum_{i=1}^{m} X(\omega_i) p_i + \sum_{i=1}^{m} Y(\omega_i) p_i = EX + EY$$

Приметимо да сада лако можемо израчунати математичко очекивање биномне расподеле са параметрима n и p. Заиста, с обзиром да је

$$S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n,$$

где је

$$I_k : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right),$$

на основу управо доказане теореме добијамо

$$ES_n = EI_1 + EI_2 + ... + EI_n = n(0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p) = np,$$

Дефиниција: Дисперзија случајне велихине X је број $DX = E(X - EX)^2$, за случај да је вредност $E(X-EX)^2$ дефинисана.

$E(X-EX)^2$ је очекивање случајне величине $(X-EX)^2$. Дисперзију можемо трансформисати на следећи начин:

$$DX = E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2EX\cdot X + (EX)^2) =$$
$$= E(X^2) - E(2EX\cdot X) + E((EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$$

С обзиром да је за дату величину X EX константан реалан број, извршене трансформације су оправдане. Дакле, ако величина X има расподелу

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & x_n \end{array}\right),$$

онда је

$$DX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

Теорема (својства дисперзије):

1. $D(X) \geq 0$, при чему једнакост важи акко је $X \equiv const$ са вероватноћом 1.
2. $D(aX+b) = a^2 D(X),\ a, b \in \mathbb{R}$

Доказ:

1. Нека величина X има расподелу

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & x_n \end{array}\right),$$

Тада је $DX = E(X-EX)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - EX)^2 p_i \geq 0$, јер је сваки сабирак ненегативан. Једнакост може да важи акко су сви сабирци једнаки 0. Како су вредности p_i веће од нуле (по дефиницији расподеле), то је могуће само ако је $x_i - EX = 0$ за све $1 \leq i \leq n$, односно $x_1 = x_2 = ... = x_n = EX$. Како су бројеви $x_1, x_2, ..., x_n$ међусобно различити, то је $n = 1$, а онда и $p_1 = 1$.

2.
$$D(aX+b) = E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aEX+b)^2 =$$
$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 =$$
$$= a^2E(X^2) + 2abEX + b^2 - a^2(EX)^2 - 2abEX - b^2 = a^2(E(X^2) - (EX)^2) = a^2D(X).$$

Број $\sqrt{DX}$ се назива стандардно одступање.
Пример: За

$$I_A : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array}\right)$$

имамо $DI_A = EI_A^2 - (EI_A)^2 = p - p^2$.

ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ВЕКТОРИ. НЕЗАВИСНОСТ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

Дефиниција: Пар (X,Y) дискретних случајних величина (на необавезно једнаким скуповима исхода)се зове **дискретан случајни вектор**. Скуп вредности случајних вектора су уређени парови бројева.

Пример: Рецимо да бацамо коцку два пута. Прва величина може да буде број који је пао у првом бацању, а друга, већи од два пала броја.

Расподела вероватноћа вектора (X,Y) је позната ако су познати скупови S_X и S_Y и вероватноћа $p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j)$ за све $(x_i, y_j) \in S_X \times S_Y,\ i, j \in \{1, 2, ...\}$
Дакле, ако су случајне величине X и Y дефинисане на скуповима $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ и $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ...\}$ имају расподеле

$$X : \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & ... \\ p_1 & p_2 & x_3 & ... \end{array}\right)$$

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots \end{pmatrix}$$

расподела вектора (X, Y) ће изгледати овако:

$$\begin{array}{ccccc} {}_{Y}{}^{X} & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ y_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ y_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ y_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \dots & . & . & . & . \end{array}$$

Мора да важи $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Ако знамо расподелу случајног вектора, можемо да одредимо расподелу сваке од његових компоненти. Оне се зову **маргиналне расподеле** тог случајног вектора. Заиста, на основу Бајесове формуле је

$$p_i = p(X = x_i) = \sum_j p(X = x_i, Y = y_j)$$

$$q_j = p(Y = y_j) = \sum_i p(X = x_i, Y = y_j)$$

Дефиниција: Нека су X и Y случајне величине на истом простору вероватноћа и нека су $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $S_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ њихови скупови вредности. Случајне величине X и Y су независне ако за све индексе i и j важи

$$p(X = x_i, Y = y_j) = p(X = x_i)p(Y = y_j)$$

Ако претходна једнакост не важи за бар један пар индекса (i, j), онда су X и Y зависне случајне величине.

Теорема: Нека су X и Y независне случајне величине са коначним скуповима вредности на истом скупу исхода. Тада је

$$E(XY) = EX \cdot EY.$$

Доказ: Нека је $S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $S_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Тада је по дефиницији случајног очекивања

$$EXY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(X = x_i) p(Y = y_j)$$

с обзиром на независност величина X и Y. Даље је

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p(X = x_i) p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) \sum_{i=1}^{m} y_j p(Y = y_j) = EX \cdot EY$$

Теорема: Нека су X и Y независне случајне величине са коначним скуповима вредности на истом скупу исхода . Тада важи

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Доказ:

$$D(X+Y) = E(X+Y)^2 - (EX+EY)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX)^2 - 2EX \cdot EY - (EY)^2 =$$

$$= EX^2 + EY^2 + 2EX \cdot EY - (EX)^2 - 2EX \cdot EY - (EY)^2 = E(X^2) - (EX)^2 + E(Y^2) - (EY)^2 = DX + DY$$

У претпоследњем кораку смо искористили претходну теорему. Сада можемо једноставно израчунати дисперзију биномне расподеле, јер с обзиром да је

$$S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

где је

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

на основу управо доказане теореме добијамо

$$DS_n = DI_1 + DI_2 + \dots + DI_n = np(1-p),$$

Александар Пејчев