Задаци из Интегралне Муавр - Лапласове теореме

1. Фабрика у току дана произведе 1000 аутомобила од којих сваки захтева дораду са вероватноћом 0.05. Колики треба да буде капацитет паркинга па да са вероватноћом 0.9 буде довољан за аутомобиле који чекају за дораду?

   Решење: Из услова задатка следи да случајна величина која представља број аутомобила произведених у току једног дана који чекају на дораду, има расподелу биномну $\mathcal{B}(1000, 0.05)$ расподелу. Нама се, заправо тражи да нађемо најмање $Q \in \mathbb{N}$ такво да је

   $$P(0 \leq X \leq Q) \geq 0.9.$$

   На основу приче са предавања, пошто је $n = 1000$ довољно велики број, сасвим је задовољавајућа оцена ($p = 0.05$ - хвала Богу)

   $$\Phi\left(\frac{Q - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 0.9,$$

   где је

   $$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

   Важна напомена: У књизи је дата таблица за функцију

   $$\Phi(t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

   где је $t \geq 0$, што наводи на забуну због коришћења истог слова Φ за две различите функције. Зато ми у овом другом случају нећемо користити ознаку Φ него Φ_1. Дакле, у књизи је дат график функције

   $$\Phi_1(t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

   где је $t \geq 0$. Овоме ћемо дати следећу интерпретацију:
   Познато је (видети нпр. материјал са предавања из Математике 3 код професора Спалевића) да је површина испод графика функције

   $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

   једнака 1. Како је дата функција парна, то су површине испод графика ове функције у левом и десном квадранту позитивног дела $y - ose$ међусобно једнаке и износе по $\frac{1}{2}$. Интеграл

   $$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   је заправо површина испод оног дела графика функције

   $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R},$$

   који се налази лево од праве $x = t$.
   У општем случају је за $f(x) > 0$

   $$\int_{a}^{b} f(x) dx$$

   површина испод оног дела графика функције $y = f(x)$ који се налази између правих $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$.
   Зато је

   $$\Phi(t) = \Phi_1(t) + 0.5, t \geq 0.$$

   За $t < 0$ користимо чињеницу да су због симетрије међусобно једнаке површине испод графика функције

   $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

   на интервалима $(-\infty, t)$ и $(-t, \infty)$ ($-t$ је овде заправо позитивно). Ово даље значи да је за $t < 0$

   $$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi(t) = 0.5 - \Phi_1(t).$$

Вратимо се сада конкретном проблему. Нама се, дакле тражи најмањи природан број Q за који је

$$\Phi\left(\frac{Q-50}{\sqrt{50\cdot 0.95}}\right)-\Phi\left(\frac{-50}{\sqrt{50\cdot 0.95}}\right)\geq 0.9,$$

односно

$$\Phi\left(\frac{Q-50}{6.89}\right)-\Phi\left(\frac{-50}{6.89}\right)\geq 0.9.$$

$\Phi\left(\frac{-50}{6.89}\right)$ приближно износи $\Phi(-7)=1-\Phi(7)=0.5-\Phi_1(7)$, што се може узети да је једнако 0, јер као што се види из таблице, $\Phi_1(5)$ је већ јако близу 0.5. Дакле, треба да важи

$$\Phi\left(\frac{Q-50}{6.89}\right)\geq 0.9,$$

односно

$$\Phi_1\left(\frac{Q-50}{6.89}\right)\geq 0.4,$$

тј.

$$\frac{Q-50}{6.89}\geq 1.28.$$

Ово последње се прочита директно из таблице. Најмањи природан број за који ово важи је 59.

2. Стрелац погађа мету са вероватноћом 0.4. Колико најмање гађања треба да планира па да са вероватноћом 0.9 оствари бар 80 погодака?
Решење: Случајна величина X која представља број погодака има биномну расподелу $\mathcal{B}(n,p)$ где је $p=0.4$ вероватноћа поготка при једном гађању, а n број гађања. Нама се тражи најмањи природан број n за који је

$$p(80\leq X\leq n)\geq 0.9.$$

Аналогно птретходном задатку, n тражимо из услова

$$\Phi\left(\frac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{0-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\geq 0.9,$$

$$\Phi\left(\frac{0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\right)-\Phi\left(\frac{80-0.4n}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\right)\geq 0.9.$$

Како је n релативно велико (преко 80 сигурно), вредност

$$\frac{0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.24}}>\sqrt{n}$$

је много већа од 5, па узимамо да је

$$\Phi\left(\frac{0.6n}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\right)=1.$$

Дакле, треба наћи најмањи природан број n за који важи

$$\Phi\left(\frac{80-0.4n}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\right)\leq 0.1,$$

што је , с обзиром да је број у загради врло вероватно мањи од 0 (вероватноћа да је стрелац остварио бар 80 погодака треба да буде велика - 0.9, па је логично да је 80 мање од математичког очекивања $EX=np=0.4n$) еквивалентно са

$$\Phi\left(\frac{0.4n-80}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\right)\leq 0.9.$$

Ово се исто као у претходном задатку своди на (потрефило се случајно 0.9 у оба случаја - на писменом сигурно нећете имати ту вредност)

$$\frac{0.4n-80}{\sqrt{n\cdot 0.24}}\geq 1.28.$$

Решавањем квадратне једначине се добија да је најмањи природан број n за које ово важи - 221.

Александар Пејчев