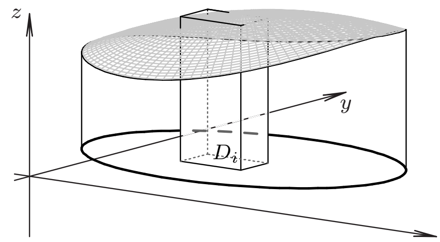
Математика 3

Душан Ђукић

6. Двоструки интеграли

6.1. Заснивање

По аналогији са одређеним интегралом, који мери *површину* испод криве, *двоструки интеграл* представља *запремину* испод површи. Зове се „двоструки” јер се рачуна дуж две димензије, нпр. по двема променљивим x и y. Интеграл функције $f(x,y)$ на области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ означавамо са



$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Двоструки интеграл уводимо слично као што је описано у глави 5 - као „интегралну суму по савршено уситњеној подели” области D. Дакле, ако се област D подели на подобласти $D_1, \dots, D_n$, и над сваком области D_i се сагради „квадар” висине $f(M_i)$ за неку *истакнуту тачку* $M_i \in D_i$, *интегрална сума* је збир површина свих квадара:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta D_i,$$

где је ΔD_i површина дела D_i. *Интеграл* I је вредност ове суме у граничном случају, када су сви делови D_i бесконачно мали у дијаметру. Под *дијаметром* скупа подразумевамо растојање између две његове најудаљеније тачке.

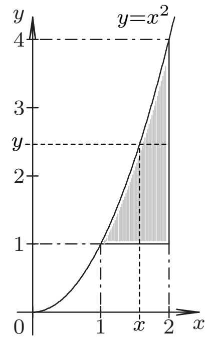
Претпоставимо да је област D задата условима $a \leqslant x \leqslant b$ и $c_1(x) \leqslant y \leqslant c_2(x)$. За фиксирано x_0, интеграл функције f по делу области D на правој $x = x_0$ је

$$I(x_0) = \int_{c_1(x_0)}^{c_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

Интеграл по целој области D тада налазимо интеграцијом интеграла $I(x)$ по $x \in [a,b]$:

$$\iint_D f\,dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y)dy.$$

Пример 6.1. Нека је област D у xy-равни дата условима $1 \leqslant x \leqslant 2$ и $1 \leqslant y \leqslant x^2$. Израчунајмо интеграл $I = \iint_D x\,dxdy$. Он се може записати као



$$I = \iint_D x\,dxdy = \int_1^2 dx \int_1^{x^2} x\,dy.$$

Како је $\int x\,dy = xy + \text{const}$, имамо

$$I = \int_1^2 dx \int_1^{x^2} x\,dy = \int_1^2 dx\big(xy|_{y=1}^{y=x^2}\big) = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \frac{9}{4}.$$

С друге стране, исту облает D можемо представити и у обрнутом поретку интеграције, условима $1 \leqslant y \leqslant 4$ и $\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2$. Као што и очекујемо, радећи на овај начин добићемо исти резултат:

$$I = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x\,dx = \int_1^4 dy \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=\sqrt{y}}^{x=2} = \int_1^4 \left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{9}{4}.$$

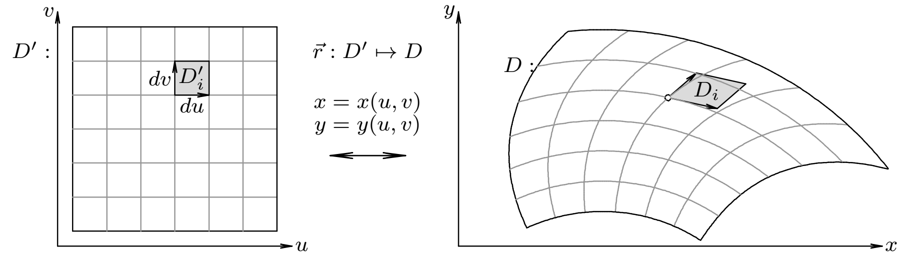
6.2. Смена променљивих

Посматрајмо интеграл по x и y,
$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$
у коме је област интеграције D описана параметарски, условима
$$D : (x,y) = \vec{r}(u,v), \quad \text{тј.} \quad \begin{Bmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{Bmatrix} \quad \text{за} \quad (u,v) \in D', \tag{18}$$
где је D' нека област у uv-равни. Јавља нам се потреба да интеграл I изразимо преко u и v.

- Област интеграције D по x и y постаје област D' по u и v;
- Интегранд $f(x,y)$ постаје функција $f(x(u,v), y(u,v))$ по u и v.
- Мање је очигледно како треба изразити диференцијал $dxdy$ у функцији u и v.

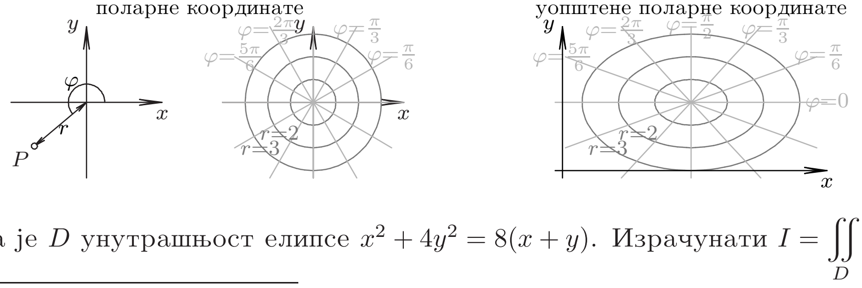
За функције x и y имамо два захтева. Пре свега, параметризација (18) не сме да има преклапања - пресликавање $(u,v) \mapsto (x,y)$ мора да буде (скоро свуда) инјективно. Такође, функције x и y морају бити скоро свуда непрекидно диференцијабилне по u и v.

Испитајмо понашање тачке $(x,y) \in D$ када тачка $(u,v) \in D'$ описује правоугаоник димензија du и dv.



Када се променљива u помери за du, тачка (x,y) ће се померити за вектор $\vec{r}_u'\,du$. Слично, када се v помери за dv, тачка (x,y) ће се померити за вектор $\vec{r}_v'\,dv$. Према томе, када тачка (u,v) опише правоугаоник димензија du и dv и површине $dudv$, тачка (x,y) описује паралелограм разапет векторима $\vec{r}_u'\,du$ и $\vec{r}_v'\,dv$, чија је површина $|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,dudv$. Одавде закључујемо да је
$$dxdy = |\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,dudv = |J(u,v)|\,dudv, \quad \text{где је} \quad J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}.$$
Све у свему, правило смене променљивих узима следећи облик:
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J(u,v)|\,dudv.$$
Детерминанта $J = J(u,v)$ назива се *Јакобијева*[6] *детерминанта* или *јакобијан*.

Једна често корисна смена су *поларне координате* (r,φ). Оне су прилагођене кругу:
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r, \quad \text{тј.} \quad dxdy = r\,drd\varphi.$$
Уопштене поларне координате, прилагођене елипси као уопштењу круга, гласе
$$\Big(\frac{x-x_0}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y-y_0}{b}\Big)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = x_0 + ar\cos\varphi \\ y = y_0 + br\sin\varphi \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad J(r,\varphi) = abr, \quad \text{тј.} \quad dxdy = abr\,drd\varphi.$$



Пример 6.2. Нека је D унутрашњост елипсе $x^2 + 4y^2 = 8(x+y)$. Израчунати $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$.

[6] *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804-1851), немачки математичар

Решење. Једначину елипсе можемо да запишемо као $(x-4)^2+4(y-1)^2=20$. Њену унутрашњост D описаћемо уопштеним поларним координатама:

$$\begin{aligned} x-4&=r\cos\varphi \\ 2(y-1)&=r\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x=4+r\cos\varphi \\ y=1+\frac{1}{2}r\sin\varphi \end{Bmatrix} \text{ за } D':\begin{Bmatrix} 0\leqslant r\leqslant\sqrt{20} \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad J=\frac{1}{2}r.$$

Видимо да је нова област интеграције D' правоугаоник, што поједностављује интеграл:

$$\begin{aligned} I&=\iint_{D'}(4+r\cos\varphi)(1+\tfrac{1}{2}r\sin\varphi)\cdot\tfrac{1}{2}r\,drd\varphi \\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{20}}dr\int_0^{2\pi}(4r+\cancel{2r^2\sin\varphi}+\cancel{r^2\cos\varphi}+\cancel{\tfrac{1}{2}r^3\sin\varphi\cos\varphi})d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{20}}dr\cdot 8\pi r=40\pi. \end{aligned}$$

У следећем примеру се појављује интеграл функције e^{-x^2} који даје Гаусову расподелу у теорији вероватноће и као такав је веома важан. Као неодређен интеграл он је неелементарна функција. Ипак, вредност одређеног интеграла

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

је позната. У следећем примеру ова вредност је израчуната паметним преласком на несвојствени двоструки интеграл.

Пример 6.3. Израчунајмо I. Свакако је такође $I=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$. Према томе,

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy=\iint_{\mathbf{D}}e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

где $\mathbf{D}$ представља први квадрант у xy-равни, тј. бесконачну област $x,y\geqslant 0$. Увођењем поларних координата $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ ($r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$) следи

$$I^2=\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-t}\cdot dt=\frac{\pi}{4}.$$

Према томе, $I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

6.3. Запремина просторног тела

Једна од примена двоструког интеграла је у израчунавању запремине просторног тела. Знамо да, ако је тело V задато условима

$$z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y), \quad \text{где} \quad (x,y)\in D,$$

његова запремина је

$$V=\iint_D(z_2-z_1)\,dxdy.$$

Општије,

$$V=\iint_D \ell(x,y)\,dxdy,$$

где $\ell(x_0,y_0)$ означава укупну дужину дела праве $\{x=x_0,\ y=y_0\}$ унутар тела V, а D је пројекција тела на xy-раван.

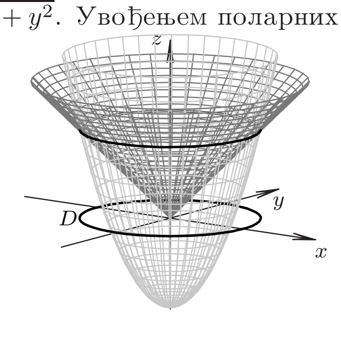
У случају када је тело смештено између равни $z=a$ и $z=b$ и површина његовог попречног пресека за $z=z_0$ је $P(z_0)$, његова запремина се може изразити и као

$$V=\int_a^b P(z)dz.$$

Пример 6.4. Израчунати запремину V између параболоида $z=x^2+y^2-2$ и конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решење. Конус и параболоид секу се тамо где је $z=x^2+y^2-2=\sqrt{x^2+y^2}$. Увођењем поларних координата

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$



овај услов постаје $z=r^2-2=r$. одакле налазимо $r=2$ (друго решење квадратне једначине је $r=-1$, што се искључује). Према томе, пројекција D тела V на xy-раван је круг дат условом $r\leqslant 2$ у поларним координатама. При томе је $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и $dxdy=r\,drd\varphi$.

За $r<2$ конус је изнад параболоида, тј. $r>r^2-2$, па је

$$V=\iint\limits_D \big(r-(r^2-2)\big)r\,drd\varphi=\int_0^2 dr\int_0^{2\pi} r(r-r^2+2)\,d\varphi=2\pi\int_0^2 r(r-r^2+2)\,dr=\frac{16\pi}{3}.$$

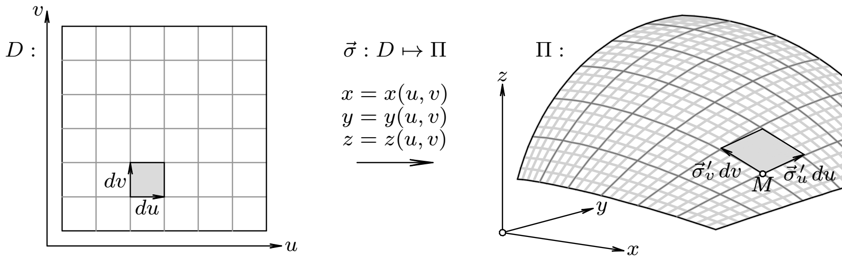
6.4. Површина површи

Дата је површ Π описана параметарски, условима

$$\Pi:(x,y,z)=\vec\sigma(u,v),\quad \text{тј.}\quad \begin{Bmatrix} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{Bmatrix}\quad \text{за}\quad (u,v)\in D,$$

где је D нека област у uv-равни, а функције x, y и z непрекидно диференцијабилне скоро свуда у области D.

Да бисмо одредили површину површи Π, поступаћемо слично као у одељку 6.2: испитаћемо понашање тачке $M(x,y,z)$ на површи када тачка $(u,v)\in D$ описује правоугаоник димензија du и dv.



Када се параметар u увећа за du (односно, v за dv), тачка M ће се померити за вектор $\vec\sigma_u'\,du$ (односно, за вектор $\vec\sigma_v'\,dv$), где су

$$\vec\sigma_u'=(x_u',y_u',z_u')\quad \text{и}\quad \vec\sigma_v'=(x_v',y_v',z_v').$$

На овај начин, правоугаоник са теменом (u,v) и димензијама (du,dv) у uv-равни се слика приближно у "паралелограм" на површи разапет векторима $\vec\sigma_u'\,du$ и $\vec\sigma_v'\,dv$, а површина тог паралелограма је

$$d\Pi=|\vec\sigma_u'\times\vec\sigma_v'|\,dudv=|(A,B,C)|\,dudv=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv,$$

где су

$$A=\begin{vmatrix} y_u' & z_u'\\ y_v' & z_v'\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} z_u' & x_u'\\ z_v' & x_v'\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x_u' & y_u'\\ x_v' & y_v'\end{vmatrix}.$$

Површину површи Π налазимо интеграцијом $d\Pi$ по области D:

$$S=\iint\limits_D d\Pi=\iint\limits_D |\vec\sigma_u'\times\vec\sigma_v'|\,dudv=\iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv. \tag{19}$$

У специјалном случају, када је површ Π експлицитно задата једначином

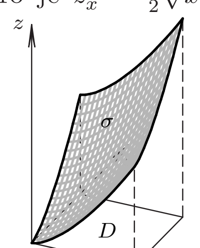
$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

улоге параметара u и v преузимају x и y, а формула (19) поприма облик

$$S=\iint\limits_D d\Pi=\iint\limits_D \sqrt{1+{z_x'}^2+{z_y'}^2}\,dxdy. \tag{20}$$

Пример 6.5. Израчунати површину површи σ дате једначином $z=x^{3/2}+y^{3/2}$ за $0\leqslant x,y\leqslant 1$.

Решење. Овде је D правоугаоник $[0,1]\times[0,1]$. Користимо формулу (20). Пошто је $z_x'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ и $z_y'=\frac{3}{2}\sqrt{y}$, површина S дате површи једнака је



$$\begin{aligned} S&=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac94 x+\frac94 y}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\Big(1+\frac94x+\frac94y\Big)^{1/2}dy\\ &=\int_0^1 dx\left[\frac{8}{27}\Big(1+\frac94x+\frac94y\Big)^{3/2}\Big|_{y=0}^{y=1}\right]=\frac{8}{27}\int_0^1\left[\Big(\frac{13}{4}+\frac94x\Big)^{3/2}-\Big(1+\frac94x\Big)^{3/2}\right]dx\\ &=\frac{2}{1215}\big(22^{5/2}-2\cdot 13^{5/2}+32\big)\approx 1{,}78351.\end{aligned}$$

Пример 6.6. Наћи површину дела сфере $x^2+y^2+z^2=1$ између равни $z=a$ и $z=b$ $(0\leqslant a<b\leqslant 1)$.

Решење. Уведимо поларне координате $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$. Тада је $z=\sqrt{1-r^2}$, па услов $a\leqslant z\leqslant b$ постаје $\sqrt{1-b^2}\leqslant r\leqslant\sqrt{1-a^2}$, уз $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Користимо формулу (19). Имамо

$$\vec\sigma_r'=\left(\cos\varphi,\sin\varphi,\tfrac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\right)\quad\text{и}\quad\vec\sigma_\varphi'=(-r\sin\varphi,r\cos\varphi,0),$$

па је $\vec\sigma_r'\times\vec\sigma_\varphi'=\left(\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\cos\varphi,\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\sin\varphi,r\right)$ и одатле $d\sigma=|\vec\sigma_r'\times\vec\sigma_\varphi'|\,drd\varphi=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,drd\varphi$.

Према томе, тражена површина је

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\sqrt{1-b^2}}^{\sqrt{1-a^2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr=2\pi\int_{\sqrt{1-b^2}}^{\sqrt{1-a^2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}=\left|\begin{array}{c}t=1-r^2\\ dt=-2r\,dr\end{array}\right|=\pi\int_{a^2}^{b^2}\frac{dt}{\sqrt t}=2\pi(b-a).$$

6.5. Задаци

1. Нека је D троугао OAB, где су $O(0,0)$, $A(0,1)$ и $B(1,1)$. Израчунати интеграл $I=\iint\limits_D\frac{x}{y}\,dxdy$.
2. Израчунати $I=\iint\limits_D(x+y)\,dxdy$, где је D област одређена параболама $y=x^2$ и $y=3-x-x^2$.
3. Израчунати интеграл $I=\iint\limits_E x^4\,dxdy$ по елипси E: $x^2+4y^2\leqslant 4$.
4. Израчунати $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ ако је D диск $x^2+y^2\leqslant 2x$.
5. Област D у xy-равни је дата условима $x+1\geqslant 2y\geqslant 2x\geqslant y$. Наћи интеграл $I=\iint\limits_D y\,dxdy$.
6. Одредити несвојствени интеграл $I=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^a}$ по целој xy-равни (тј. $\mathbb{R}^2$), где је $a>1$ дата константа.
7. Израчунати интеграл $I=\int_1^e(\ln x+1)\,dx\int_x^e\frac{dy}{\ln y}$.
8. Област D у xy-равни дата је условима $y\geqslant x\geqslant 0$. Израчунати интеграл $I=\iint\limits_D\frac{y-x}{y+x}e^{x^2-y^2}dxdy$. На пример, проверити може ли се употребити смена $x=r\ \mathrm{sh}\ t$, $y=r\ \mathrm{ch}\ t$.
9. Област D у xy-равни је дата условима $x,y\geqslant 0$ и $x^4+y^3\leqslant xy$. Израчунати интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$.
10. Израчунати запремину тела између параболоида $z=1-x^2-y^2$ и равни $z=0$.
11. Израчунати запремину тела одређеног површима $z=x^2+3y^2-4y$ и $z=4x-y^2$.
12. Наћи запремину дела лопте $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ који лежи унутар цилиндра $x^2+y^2\leqslant x$.
13. Израчунати запремину тела одређеног условима $x^2+y^2\leqslant 1$ и $z^2+2xy\leqslant 1$.
14. Наћи запремину тела задатог условима $-1\leqslant xy\leqslant 1$, $-1\leqslant xz\leqslant 1$ и $-1\leqslant yz\leqslant 1$ у координатном простору.
15. Наћи површину површи задате једначином $z=\sqrt{2-\frac12(x+y)^2}$ за $x,y\in[0,1]$.
16. *Хеликоид* је површ дата једначинама $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и $z=\varphi$. Одредити површину дела хеликоида за $0\leqslant r\leqslant 1$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.
17. Израчунати површину дела сфере $x^2+y^2+z^2=1$ унутар цилиндра $x^2+4y^2=1$.
18. Одредити површину дела површи $z=\sqrt{2xy}$ који лежи унутар цилиндра $x^2+y^2=1$, $x,y\geqslant 0$.
19. Наћи површину површи Π дате једначином $z=e^x\sin y$ за $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

6.6. Решења

1. У троуглу D границе за y су $0 \leqslant y \leqslant 1$, а за x су $0 \leqslant x \leqslant y$. Зато је тражени интеграл
$$I=\int_0^1 dy\int_0^y \frac{x}{y}\,dx=\int_0^1 dy\cdot\Big(\frac{x^2}{2y}\Big)\Big|_{x=0}^{x=y}=\int_0^1 dy\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{4}.$$

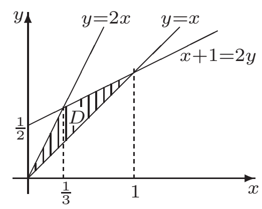
2. Одредимо прво пресечне тачке двеју парабола: имамо $x^2=3-x-x^2$, тј. $2x^2+x-3=0$, чија су решења $x=1$ и $x=-\frac{3}{2}$. Дакле, $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1$. На овом интервалу је прва елипса испод друге, те је $x^2\leqslant y\leqslant 3-x-x^2$. Према томе, тражени интеграл је
$$I=\int_{-\frac{3}{2}}^1 dx\int_{x^2}^{3-x-x^2}(x+y)dy=\int_{-\frac{3}{2}}^1 dx\Big(xy+\frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_{y=x^2}^{y=3-x-x^2}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}}^1(9-7x^2-2x^3)dx=-\frac{1375}{192}.$$

3. Увешћемо уопштене поларне координате:
$$\begin{Bmatrix} x=2r\cos\varphi\\ y=\ \ r\sin\varphi\end{Bmatrix}\quad \text{за } D':\begin{matrix}0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{matrix}\quad \text{и}\quad J=2r,\ \text{ тј.}\quad dxdy=2r\,drd\varphi.$$
Сада је
$$I=\iint_{D'}\big(2r\cos\varphi\big)^4\cdot 2r\,drd\varphi=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}32r^5\cos^4\varphi\,d\varphi=32\int_0^1 r^5dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi.$$
Како је $\int_0^1 r^5dr=\frac{1}{6}$ и $\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{3}{4}\pi$, добијамо $I=4\pi$.

4. Ако уведемо обичне поларне координате $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, услов области D постаје $r^2\leqslant 2r\cos\varphi$, тј. $D':\{0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi\}$.

   Пошто је притом $0\leqslant 2\cos\varphi$, границе за φ су $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Све у свему,
$$\begin{Bmatrix} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{Bmatrix}\quad \text{за}\quad D':\begin{Bmatrix}-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi\end{Bmatrix}.$$
Сада је
$$I=\iint_{D'}r\cdot r\,drd\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\,dr=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\cdot\frac{8}{3}\cos^3\varphi=\frac{32}{9}.$$

5. Област D је најлакше представити графички, као на слици. Ова област је описана условима $x\leqslant y\leqslant 2x$ за $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$ и $x\leqslant y\leqslant\frac{x+1}{2}$ за $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$. Зато је
$$I=\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_x^{2x}y\,dy+\int_{\frac{1}{3}}^1 dx\int_x^{\frac{x+1}{2}}y\,dy$$
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{3x^2}{2}\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{1+2x-3x^2}{8}\,dx=\frac{1}{54}+\frac{2}{27}=\frac{5}{54}.$$



6. У обичним поларним координатама, $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ по области $D':\{0\leqslant r,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ дати интеграл се своди на
$$I=\iint_{D'}\frac{r\,drd\varphi}{(1+r^2)^a}=\int_0^{+\infty}\frac{r\,dr}{(1+r^2)^a}\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{r\,dr}{(1+r^2)^a}=\left|\begin{smallmatrix}t=1+r^2\\ dt=2r\,dr\end{smallmatrix}\right|=\pi\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^a}=\frac{\pi}{a-1}.$$

7. Унутрашњи интеграл је неелементаран. Зато ћемо покушати да дати двоструки интеграл рачунамо у другом поретку. Овај интеграл је по области D датој условима $1\leqslant x\leqslant y\leqslant e$, па поредак интеграције може бити и $\{1\leqslant y\leqslant e;\ 1\leqslant x\leqslant y\}$. Дакле,
$$I=\int_1^e\frac{dy}{\ln y}\int_1^y(\ln x+1)dx=\int_1^e\frac{dy}{\ln y}\cdot x\ln x\Big|_{x=1}^{x=y}=\int_1^e\frac{dy}{\ln y}\cdot y\ln y=\int_1^e y\,dy=\frac{e^2-1}{2}.$$

8. Услов $y\geqslant x\geqslant 0$ даје као једина ограничења D': $r\geqslant 0$ и $t\geqslant 0$.

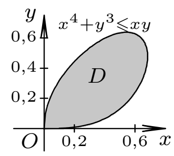
   Уверимо се прво да је предложена смена инјективна. Имамо $y+x=re^t$, $y-x=re^{-t}$ и $y^2-x^2=r^2$, одакле је $t=\ln\frac{y+x}{r}=\frac{1}{2}\ln\frac{y+x}{y-x}$ и $r=\sqrt{y^2-x^2}$, па тачка (x,y) једнозначно одређује r и t, тј. смена је заиста инјективна. Јакобијан је
$$J=\begin{vmatrix}\operatorname{sh}t & \operatorname{ch}t\\ r\operatorname{ch}t & r\operatorname{sh}t\end{vmatrix}=-r,\quad\text{тј.}\quad dxdy=r\,drdt,$$
па тражени интеграл постаје
$$I=\iint_{D'}\frac{re^{-t}}{re^t}e^{-r^2}\cdot r\,drdt=\int_0^\infty e^{-2t}dt\int_0^\infty re^{-r^2}dr=\Big(-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big)\Big|_{t=0}^\infty\cdot\Big(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big)\Big|_{r=0}^\infty=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

9. Услов области D запишимо као $\frac{x^3}{y} + \frac{y^2}{x} \leqslant 1$ и уведимо смену $u = \frac{x^3}{y}$ и $v = \frac{y^2}{x}$.

Видимо да је $u^2v = x^5$ и $v^3u = y^5$, што једнозначно одређује x и y кад год су дати u и v; другим речима, смена је инјективна:

$$\left\{\begin{aligned} x &= u^{2/5}v^{1/5} \\ y &= u^{1/5}v^{3/5} \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad J = \frac{dxdy}{dudv} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5}u^{-\frac{3}{5}}v^{\frac{1}{5}} & \frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}v^{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{5}u^{\frac{2}{5}}v^{-\frac{4}{5}} & \frac{3}{5}u^{\frac{1}{5}}v^{-\frac{2}{5}} \end{vmatrix} = u^{-\frac{2}{5}}v^{-\frac{1}{5}}, \quad \text{тј.} \quad dxdy = u^{-\frac{2}{5}}v^{-\frac{1}{5}}dudv.$$

Област интеграције по $dudv$ је троугао D' површине $\frac{1}{2}$: $u, v \geqslant 0$ и $u + v \leqslant 1$. Дакле,



$$\iint\limits_D x\,dxdy = \iint\limits_{D'} u^{\frac{2}{5}}v^{\frac{1}{5}} \cdot u^{-\frac{2}{5}}v^{-\frac{1}{5}}dudv = \iint\limits_{D'} dudv = \frac{1}{2}.$$

10. Дати параболоид сече раван $z = 0$ по кругу $x^2 + y^2 = 1$. Зато је запремина датог тела $V = \iint_D (1-x^2-y^2)dxdy$, где је D унутрашњост круга $x^2+y^2 = 1$. Увешћемо поларне координате:

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \text{где је} \quad D' : \{0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

Тада је $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, јакобијан је $J = r$, те је

$$V = \overset{\prime}{\iint\limits_D}(1 - r^2)\cdot r\,drd\varphi = \int_0^1 r(1 - r^2)\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^1 (r - r^3)\,dr = 2\pi\Big(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big)\Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{2}.$$

11. Ове две површи се секу по елипси $x^2 + 3y^2 - 4y = 4x - y^2$, тј. након допуњавања квадрата $(x - 2)^2 + (2y - 1)^2 = 5$. Уводимо поларне координате:

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + 2 \\ y &= \tfrac{1}{2}r\sin\varphi + \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{за} \quad \begin{aligned} 0 \leqslant\, & r \leqslant \sqrt{5}, \\ 0 \leqslant\, & \varphi \leqslant 2\pi. \end{aligned}$$

Јакобијан је $J = \frac{1}{2}r$, а пошто је $z_1 - z_2 = (4x - y^2) - (x^2 + 3y^2 - 4y) = 5 - r^2$, запремина је

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2)\cdot \frac{1}{2}r\,dr = \frac{25\pi}{4}.$$

12. Тачно четвртина посматраног дела лопте је у првом октанту; тамо је $x, y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant x$ и $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Преласком на поларне координате $\left\{\begin{smallmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{smallmatrix}\right\}$ ови услови гласе $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant \cos\varphi$ и $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - r^2}$. Како је $dxdy = r\,drd\varphi$, следи да је тражена запремина

$$\begin{aligned} V &= 4\iint\limits_{D'} \sqrt{1 - r^2}\cdot r\,drd\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\sqrt{1 - r^2}\,dr = \left|\begin{smallmatrix} t=1-r^2 \\ dt=-2r\,dr \end{smallmatrix}\right| = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\sin^2\varphi}^1 \sqrt{t}\,dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=\sin^2\varphi}^{t=1} = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\,d\varphi = \frac{4}{3}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\Big) \approx 1{,}20551. \end{aligned}$$

13. Како је овде $-\sqrt{1 - 2xy} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - 2xy}$, тражена запремина је $V = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 2\sqrt{1 - 2xy}\,dxdy$. Увешћемо поларне координате $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ за $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $-\pi \leqslant \varphi < \pi$. Због симетрије, у области $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ је тачно четвртина запремине, те је

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}\,dr = 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}\,dr. \qquad (*)$$

Унутрашњи интеграл по r рачунамо сменом $t = 1 - r^2\sin 2\varphi$: тада је $dt = -2r\sin 2\varphi\,d\varphi$ и

$$\int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}\,dr = \frac{1}{\sin 2\varphi}\int_{1-\sin 2\varphi}^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3\sin 2\varphi}t^{3/2}\Big|_{t=1-\sin 2\varphi}^{t=1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1 - (1 - \sin 2\varphi)^{3/2}}{\sin 2\varphi}.$$

Мало ћемо упростити овај израз: како је $\sin 2\varphi = \cos 2\theta = 1 - u^2$ за $\theta = \frac{\pi}{4} - \varphi$ и $u = \sqrt{2}\sin\theta$, имамо

$$\frac{1 - (1 - \sin 2\varphi)^{3/2}}{\sin 2\varphi} = \frac{1 - u^3}{1 - u^2} = u + \frac{1}{1 + u} = \sqrt{2}\sin\theta + \frac{1}{1 + \sqrt{2}\sin\theta}, \qquad \frac{\pi}{2} > \theta > 0.$$

Добили смо да је $\int_0^1 2r\sqrt{1 - r^2\sin 2\varphi}\,dr = \frac{2}{3}\big(\sqrt{2}\sin\theta + \frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\theta}\big)$ и $d\varphi = -d\theta$, па израз $(*)$ постаје

$$V=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(\sqrt{2}\sin\theta+\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\theta}\Big)\,d\theta=\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}+\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$
$$=\Big|_{d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}}^{t=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\Big|=\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2dt}{1+2t\sqrt{2}+t^2}\right)=\frac{8}{3}\big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\big)\approx 6{,}12157.$$

14. Читава коцка $-1\leqslant x,y,z\leqslant 1$ припада посматраном телу, а њена запремина је 8. Остаје да измеримо део тела ван ове коцке.

Нека је V_{x+} део тела у области $x>1$, а V_{x-} део тела у области $x<-1$. Слично дефинишемо и делове тела $V_{y+},V_{z+},V_{y-},V_{z-}$. Никоја два од ових шест делова немају пресечних тачака: ако је нпр. $x>1$ и $y>1$, онда је $xy>1$. Сада одредимо њихове запремине. За дато $x>1$ важи $-\frac{1}{x}<y,z<\frac{1}{x}$, тј. попречни пресек тела је заправо квадрат странице $\frac{2}{x}$ и површине $\frac{4}{x^2}$. Тако је запремина дела V_{x+} једнака $\int_1^\infty\frac{4dx}{x^2}=4$. Исте запремине имају и преосталих пет делова. Према томе, запремина целог тела је $V=8+6\cdot 4=32$.

15. Како је $z'_x=z'_y=(x+y)/\sqrt{8-2(x+y)^2}$, имамо
$$d\Pi=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\frac{2\,dxdy}{\sqrt{4-(x+y)^2}}.$$
Тражена површина је
$$P=\int_0^1dx\int_0^1\frac{2\,dy}{\sqrt{4-(x+y)^2}}=\int_0^1 2\Big(\arcsin\frac{x+1}{2}-\arcsin\frac{x}{2}\Big)\,dx=\frac{4\pi}{3}-4(\sqrt{3}-1)\approx 1{,}26059.$$

16. Користићемо формулу (19). Имамо $\vec{\sigma}'_r=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$ и $\vec{\sigma}'_\varphi=(-r\sin\varphi,r\cos\varphi,1)$, па је површина
$$S=\iint_D|\vec{\sigma}'_u\times\vec{\sigma}'_v|\,dudv=\iint_D|(\sin\varphi,-\cos\varphi,r)|drd\varphi=\iint_D\sqrt{r^2+1}\,drd\varphi$$
$$=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1}\,d\varphi=2\pi\int_0^1\sqrt{r^2+1}\,dr=\pi\big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\big)\approx 7{,}2118.$$

17. Пошто је $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, можемо да користимо формулу (20):
$$d\Pi=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$
Област интеграције D је дата условом $x^2+4y^2\leqslant 1$ и у њој је $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ за $-1\leqslant x\leqslant 1$. Дакле,
$$P=\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{-1}^1dx\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{-1}^1dx\cdot\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}=\int_{-1}^1\frac{\pi}{3}dx=\frac{2\pi}{3}.$$

18. Уводимо поларне координате:
$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=\sqrt{2xy}=r\sqrt{\sin 2\varphi}.$$
Тада је $0\leqslant r\leqslant 1$; осим тога, услов $x,y\geqslant 0$ даје $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. Штавише, површ је симетрична у односу на раван $x=y$ (тј. $\varphi=\pi/4$), па је довољно да израчунамо запремину за $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$ и резултат помножимо са 2. Како је
$$d\sigma=|\vec{\sigma}'_r\times\vec{\sigma}'_\varphi|\,drd\varphi=\Big|\big(\cos\varphi,\sin\varphi,\sqrt{\sin 2\varphi}\big)\times\big(-r\sin\varphi,r\cos\varphi,\tfrac{r\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\big)\Big|\,drd\varphi$$
$$=\Big|\big(-\tfrac{r\sin\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},-\tfrac{r\cos\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},r\big)\Big|\,drd\varphi=r\sqrt{1+\tfrac{1}{\sin 2\varphi}}\,drd\varphi,$$
формула (19) нам даје
$$P=2\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\frac{1}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi\int_0^1r\,dr=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\frac{1}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=\Big|_{d\varphi=\frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}}}^{t=\sin 2\varphi}\Big|=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=-\big(\arcsin\sqrt{1-t}\big)\big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

19. Пошто је $d\Pi = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + e^{2x}\sin^2 y + e^{2x}\cos^2 y}\,dxdy = \sqrt{1 + e^{2x}}\,dxdy$, површина је једнака

$$P = \int_0^{2\pi} dy \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx = \Big|{}^{t=e^x}_{dt=e^x dx}\Big| = 2\pi \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt$$

$$= \Big|{}^{u=1+t^2}_{du=2t\,dt}\Big| = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{u^2\,du}{u^2 - 1} = \pi \left(2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}$$

$$= \pi \left(2\sqrt{e^2+1} - 2\sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{e^2+1} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{e^2+1} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \right) \approx 12{,}5883.$$