# ИТМ – Дискретна математика

*Душан Ђукић*

## 3. Дискретна вероватноћа

### 3.1. Основни појмови

Неформално речено, предмет изучавања теорије вероватноће су експерименти чији се исходи не могу са сигурношћу предвидети. Она би требало да нам омогући да одредимо колико је који исход „вероватан”. Дакле, да теоријски опише нешто што зависи од случаја. Ма шта то значило.

Случајни процеси су свуда око нас и сам појам вероватноће нам није нов. На пример, умемо да кажемо да при бацању новчића пада глава са вероватноћом $\frac{1}{2}$. При томе подразумевамо да, ако новчић бацимо много пута, главу очекујемо у око половине случајева. Ипак, тек је Колмогоров[1] 1933. математички прецизно дефинисао вероватноћу.

Основна претпоставка у теорији вероватноће је да, мада исход експеримента није унапред познат, скуп могућих исхода је познат. Овај скуп, назовимо га $\Omega$, зове се и *простор исхода* или *елементарних догађаја*. Сваком исходу $\omega \in \Omega$ је додељена вероватноћа $P(\omega)$: $0 \leqslant P(\omega) \leqslant 1$, тако да је збир вероватноћа свих исхода једнак 1.

Под *догађајем* се подразумева неки скуп „повољних” исхода, тј. неки подскуп скупа $\Omega$. Вероватноћа догађаја је, природно, збир вероватноћа повољних исхода који га сачињавају.

*Пример 3.1.* Бацамо новчић 4 пута. Са једнаком вероватноћом $\frac{1}{2}$ падају глава (Г) и писмо (П). Простор исхода је

$$\{\text{ГГГГ}, \text{ГГГП}, \text{ГГПГ}, \text{ГГПП}, \text{ГПГГ}, \dots, \text{ПППП}\}.$$

Има укупно 16 могућих исхода. Вероватноћа сваког исхода је $\frac{1}{16}$.

Размотримо догађај $D$: „двапут пада глава, а двапут писмо”. Тај догађај је унија 6 повољних исхода:

$$D = \{\text{ППГГ}, \text{ПГПГ}, \text{ПГГП}, \text{ГППГ}, \text{ГПГП}, \text{ГГПП}\}.$$

Вероватноћа догађаја $D$ је једнака збиру вероватноћа појединачних исхода: $P(D) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

У случају пребројиво бесконачног скупа могућих исхода ову дефиницију треба прилагодити.

*Дефиниција 3.1. Дискретан простор вероватноће* се састоји од:

(1) Непразног пребројивог скупа $\Omega$ могућих исхода;

(2) Функције $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, назване *расподелом вероватноће*, која сваком догађају $D \subset \Omega$ додељује вероватноћу $P(D)$ по следећим правилима:

  (а) $P(\Omega) = 1$;

  (б) Кад год су $D_1, D_2, \dots$ међусобно дисјунктни догађаји, важи $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(D_i)$.

Из услова (2а) и (2б) следи и да је $P(\emptyset) = 0$. Догађај $\Omega$ је *сигуран*, док је догађај $\emptyset$ *немогућ* и сигурно се неће догодити.

Ако је простор исхода коначан, свакако је једна могућност расподеле вероватноће (али не и једина) да сви исходи имају једнаку вероватноћу. На пример, онај новчић из примера 3.1 има равномерну расподелу.

*Дефиниција 3.2.* Ако је $\Omega$ коначан скуп и за сваки исход $\omega \in \Omega$ важи $P(\omega) = \frac{1}{n}$, где је $n = |\Omega|$, кажемо да је расподела вероватноће *равномерна*.

За дати догађај $A$, *супротним догађајем* називамо догађај $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

[1] Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987), совјетски/руски математичар

*Тврђење 3.1.* За произвољне догађаје $A, B \subset \Omega$ важи:

(а) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
(б) ако је $A \subset B$, онда је $P(A) \leqslant P(B)$;
(в) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

*Доказ.* (а) Следи из услова $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$.

(б) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A)$, јер су $A$ и $B \setminus A$ дисјунктни.

(в) Како је $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$, имамо $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Следећи пример са неочекиваним одговором познат је као *Рођендански проблем.*

*Пример 3.2.* У просторији седе 23 особе. Колика је вероватноћа да неке две особе имају рођендан истог дана?

*Решење.* Занемарићемо преступне године које имају 366 дана. Сматраћемо да све имају по 365.

Одредимо вероватноћу да сви људи имају различите рођендане.

- Број могућих избора 23 рођендана је једнак $A = 365^{23}$.
- С друге страме, број избора 23 *различита* рођендана је $B = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 343$.

Вероватноћа да сви имају различите рођендане је

$$\frac{B}{A} = \prod_{i=1}^{22} \frac{365 - i}{365} = \prod_{i=1}^{22} \left(1 - \frac{i}{365}\right) < \prod_{i=1}^{22} e^{-\frac{i}{365}} = e^{-\frac{1+2+\cdots+22}{365}} \approx 0{,}499998.$$

Према томе, вероватноћа да неке две особе имају исти рођендан је већа од 50%. (Испоставља се да је тачан резултат око 50,7%.)

### 3.2. Независност и условна вероватноћа

Ако су догађаји $A$ и $B$ „независни” (ма шта то значило), ми очекујемо да вероватноћа догађаја $A$ не зависи од тога да ли се догађај $B$ десио. Оно што знамо је да се догађај $B$ дешава с вероватноћом $P(B)$, а оба догађаја $A$ и $B$ десиће се с вероватноћом $P(A \cap B)$. *Условну вероватноћу* догађаја $A$ ако се десио догађај $B$ дефинишемо као количник ове две вероватноће:

*Дефиниција 3.3.* Вероватноћа догађаја $A$ под условом да се десио догађај $B$, у ознаци $P(A \mid B)$, једнака је

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{под претпоставком да је } P(B) \neq 0.$$

Догађаје $A$ и $B$ називамо *независним* управо онда када је условна вероватноћа $P(A \mid B)$ једнака вероватноћи $P(A)$. То је еквивалентно следећој дефиницији:

*Дефиниција 3.4.* Кажемо да су догађаји $A$ и $B$ *независни* ако је $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ако нису независни, кажемо да су *зависни.*

Видимо да је независност догађаја симетрична релација: ако је догађај $A$ независан од $B$, онда је и $B$ независан од $A$.

*Пример 3.3.* Бацамо коцкицу са равномерном расподелом (тј. сваки број од 1 до 6 пада с вероватноћом $\frac{1}{6}$). Са $A$ означавмо догађај „добијени број је паран”, са $B$ догађај „добијени број није већи од 4”, а са $C$ догађај „добијени број није мањи од 4”.

Скуп могућих исхода је $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, док је $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $C = \{4, 5, 6\}$. Даље, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cap C = \{4, 6\}$ и $B \cap C = \{4\}$.

- Како је $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ и $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, догађаји $A$ и $B$ су независни.
- Како је $P(A \cap C) = \frac{1}{3}$ и $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, догађаји $A$ и $C$ су зависни.
- Како је $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$ и $P(B)P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, догађаји $B$ и $C$ су зависни.

Следећи пример показује да условна вероватноћа није увек онаква каквом се чини.

*Пример 3.4.* Двапут је бачен новчић (са равномерном расподелом). Ако је бар једном пала глава, колика је вероватноћа да је и други пут пала глава?

*Решење.* Тражимо условну вероватноћу догађаја $A$ „оба пута је пала глава” ако се десио догађај $B$ „бар једном је пала глава”. Са Г означавамо главу, а са П писмо.

Догађај $B$ одговара трима исходима (од 4 могућа): $B = \{ГГ,ГП,ПГ\}$, те је $P(B) = \frac{3}{4}$. С друге стране, догађај $A = A \cap B$ одговара само једном исходу: $A \cap B = \{GG\}$, те је $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Према томе, $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

У претходном примеру се одговор $\frac{1}{2}$ на први поглед чинио логичним. Међутим, тај закључак би се темељио на посматрању могућности „и други пут је пала глава” као независног догађаја, а она сама по себи није догађај јер зависи од догађаја $B$.

Ова обмана је још уочљивија у следећој загонетки, познатој као *Монти Холов задатак.*

*Пример 3.5.* У ТВ игри такмичар стоји пред трима вратима и треба да изабере она иза којих је велика награда. Такмичар одабра једна врата и извести водитеља о свом избору, али уместо да их отвори, водитељ му рече: „Чекај да ти прво покажем шта ћеш добити ако си промашио.” Рекавши то, отвори му друга врата иза којих је била нека безвредна награда. „А сада”, рече водитељ, „остајеш ли при свом избору или желиш да га промениш?”

Да ли је за такмичара боље да промени избор или да остане при своме?

Нема потребе да вам одмах покажем решење. Размислите о питању.

Следи још неколико формула о условној вероватноћи.

*Тврђење 3.2 (Бејзова[2] правила).* Ако су $A$ и $B$ догађаји и $P(A)P(B) > 0$, важи:

(а) $P(B \mid A) = P(A \mid B)P(B)/P(A)$;

(б) Ако догађаји $B_1, \dots, B_n$ чине партицију скупа $\Omega$ и при томе је $P(B_i) > 0$, онда је
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i).$$
Специјално, $P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \bar{B})P(\bar{B})$ ако је $0 < P(B) < 1$.

(в) $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1\cap A_2) \cdots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$.

*Доказ.* (а) $P(A)P(B \mid A) = P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$.

(б) Како је $A$ дисјунктна унија догађаја $A\cap B_i$, важи $P(A) = \sum_i P(A\cap B_i) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)$.

(в) Следи множењем једнакости $P(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) = P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \cdot P(A_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{k} A_i)$ за $k = 1, \dots, n-1$. □

*Пример 3.6.* У некој земљи 2% становника оболи од короне. На тесту је 99% заражених позитивно на вирус. С друге стране, 3% здравих пацијената је такође позитивно на тесту. Ако је нека особа позитивна на тесту, колика је вероватноћа да је заиста заражена?

*Решење.* Означимо са $K$ догађај да особа има корону, а са $T$ да је позитивна на тесту. Дато нам је
$$P(K) = 0{,}02, \quad P(T \mid K) = 0{,}99, \quad P(T \mid \bar{K}) = 0{,}03.$$

Добијамо $P(T) = P(K)P(T \mid K) + P(\bar{K})P(T \mid \bar{K}) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}03 = 0{,}0492$. Најзад,
$$P(K \mid T) = \frac{P(K)P(T \mid K)}{P(T)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}99}{0{,}0492} \approx 0{,}402.$$

Дакле, вероватноћа да је позитивна особа заиста болесна је око 40,2%, што није баш похвално.

### 3.3. Случајне променљиве

*Случајна променљива* је променљива којој се додељује нека вредност, обично број, у зависности од исхода експеримента. Тако се свака доступна вредност добија са одређеном вероватноћом. Строго гледано, случајна променљива је *функција* по исходу и није променљива у правом смислу те речи.

*Дефиниција 3.5.* *Случајна променљива* је ма која функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

[2] *Thomas Bayes* (1701-1761), енглески статистичар и филозоф, понегде преведен по Вуку као „Бајес”

На овај начин, ако је $a$ реалан број,

$$X^{-1}(a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$$

је догађај, а његову вероватноћу $P(X^{-1}(a))$ можемо писати једноставније као $P(X = a)$ - у значењу „$X$ је једнако $a$ са вероватноћом $P(X = a)$".

*Дефиниција 3.6.* Функција $f : a \mapsto P(X = a)$ се назива *закон расподеле* случајне променљиве $X$.

*Функција расподеле* је функција $F : a \mapsto P(X \leqslant a)$.

Појам закона расподеле има смисла само за дискретне случајне променљиве. У свим осталим случајевима главну улогу игра функција расподеле. Наиме, функција расподеле нам даје вероватноћу да $X$ припада датом интервалу $(-\infty, a]$ или $(a, b]$.

*Пример 3.7.* Бацимо новчић с равномерном расподелом три пута и посматрајмо случајну променљиву $X =$ број глава.

- $X = 0$ у случају исхода ППП, с вероватноћом $\frac{1}{8}$;
- $X = 1$ у случају исхода ППГ, ПГП и ГПП, с вероватноћом $\frac{3}{8}$;
- $X = 2$ у случају исхода ПГГ, ГПГ и ГГП, с вероватноћом $\frac{3}{8}$;
- $X = 3$ у случају исхода ГГГ, с вероватноћом $\frac{1}{8}$.

Према томе, закон расподеле променљиве $X$ је

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Ако експеримент из претходног примера поновимо много пута, очекивали бисмо $X = 0$ у око $\frac{1}{8}$ случајева, $X = 1$ у око $\frac{3}{8}$ случајева, итд. Просечна вредност променљиве $X$ би тада била око

$$\tfrac{1}{8} \cdot 0 + \tfrac{3}{8} \cdot 1 + \tfrac{3}{8} \cdot 2 + \tfrac{1}{8} \cdot 3 = 1{,}5.$$

Ова просечна вредност у општем случају се назива *очекиваном вредношћу* случајне променљиве $X$.

*Дефиниција 3.7.* *Очекивана вредност* или *математичко очекивање* дискретне случајне променљиве $X$ је

$$E(X) = \sum_a P(X = a) \cdot a,$$

где сума иде по свим могућим вредностима $a$ случајне променљиве $X$.

Дакле, очекивана вредност случајне променљиве $X$ је њена просечна вредност коју бисмо очекивали ако експеримент поновимо много пута. Она не мора да буде једна од могућих вредности променљиве $X$.

Следеће тврђење се једноставно показује:

*Тврђење 3.3.* Ако су $X$ и $Y$ случајне променљиве на истом простору вероватноће и $\lambda$ реалан број, важи

$$E(\lambda X) = \lambda E(X) \quad \text{и} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y). \quad \square$$

С друге стране, једнакости попут $E(XY) = E(X)E(Y)$ и $E(f(X)) = f(E(X))$ (за функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) у општем случају нису тачне.

*Пример 3.8.* Имамо неуравнотежен новчић који са вероватноћом $p$ $(0 < p < 1)$ пада на главу, а са вероватноћом $1 - p$ на писмо.

Нека је $X = 1$ ако новчић падне на главу, а $X = 0$ ако падне на писмо. Тада је $E(X) = p$.

Сада размотримо експеримент у коме се овај новчић баца $n$ пута и означимо са $X$ број појављивања главе. Случајну променљиву $X$ можемо да представимо у облику збира $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где је $X_i = 1$ ако се у $i$-том бацању појавила глава и $X_i = 0$ у супротном. Тада је

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot E(X) = np.$$

Следеће тврђење, добијено простом заменом редоследа сумирања, понекад може олакшати израчунавање очекиване вредности дискретне случајне променљиве.

*Тврђење 3.4.* Ако су могуће вредности случајне променљиве $X$ у скупу $\{0,1,2,\dots\}$, онда се њена очекивана вредност може израчунати као

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n).$$

*Доказ.* $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P(X=k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n).$ □

*Пример 3.9.* Имамо новчић који са вероватноћом $p$ показује главу, а са вероватноћом $1-p$ писмо. Новчић бацамо све док први пут не добијемо главу. Означимо са $X$ потребан број бацања. Одредити: (а) $E(X)$; (б) $E(2^X)$.

*Решење.* За $n\in\mathbb{N}$, услов $X\geqslant n$ значи да је првих $n-1$ пута пало писмо. Вероватноћа да се то деси је $(1-p)^{n-1}$, тј. $E(X\geqslant n)=(1-p)^{n-1}$.

(а) Користимо тврђење 3.4: $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}=\dfrac{1}{p}$.

(б) Како је $P(X=n)=P(X\geqslant n)-P(X\geqslant n+1)=(1-p)^{n-1}-(1-p)^n=p(1-p)^{n-1}$, добијамо

$$E(2^X)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot p(1-p)^{n-1}=2p\sum_{n=1}^{\infty}(2-2p)^{n-1}=\frac{1}{2p-1}.$$

Као што видимо, ова очекивана вредност постоји само ако је $p>\frac{1}{2}$.

### 3.4. Дисперзија и зависност случајних променљивих

Мада очекивана вредност $E(X)$ даје корисне информације о реду величине случајне променљиве $X$, она не говори ништа о њеном расипању. Друга величина, *дисперзија*[3] $\mathrm{Var}(X)$, мери „склоност” променљиве $X$ ка одступању од своје очекиване вредности $E(X)$.

*Дефиниција 3.8. Дисперзија* случајне променљиве $X$ је $\mathrm{Var}(X)=E\big((X-E(X))^2\big)$.

*Стандардна девијација* је $\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

*Тврђење 3.5.* (а) $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2$; (б) $\mathrm{Var}(\lambda X)=\lambda^2\mathrm{Var}(X)$ за $\lambda\in\mathbb{R}$.

*Доказ.* (а) $\mathrm{Var}(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2-2XE(X)+E(X)^2)=E(X^2)-2E(XE(X))+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$.

(б) $\mathrm{Var}(\lambda X)=E(\lambda^2X^2)-E(\lambda X)^2=\lambda^2E(X^2)-\lambda^2E(X)^2=\lambda^2\mathrm{Var}(X)$. □

*Пример 3.10.* Ако бацамо коцкицу са равномерном расподелом, сваки од резултата $1,2,3,4,5,6$ има вероватноћу $\frac{1}{6}$, очекивана вредност је $E(X)=3{,}5$, а дисперзија је

$$\mathrm{Var}(X)=\tfrac{1}{6}(1-3{,}5)^2+\tfrac{1}{6}(2-3{,}5)^2+\tfrac{1}{6}(3-3{,}5)^2+\tfrac{1}{6}(4-3{,}5)^2+\tfrac{1}{6}(5-3{,}5)^2+\tfrac{1}{6}(6-3{,}5)^2=\tfrac{35}{12}.$$

Стамдардна девијација је $\sqrt{35/12}\approx 1{,}71$.

Вероватноћа одступања случајне променљиве од очекиване вредности опада са растом одступања. Следеће тврђење даје процену квадратног опадања те вероватноће.

*Тврђење 3.6 (Неједнакост Чебишова*[4]*).* Вероватноћа да важи $|X-E(X)|\geqslant\alpha$ није већа од $\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\alpha^2}$.

*Доказ.* Имамо

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_x(x-E(X))^2P(X=x)>\sum_{|x-E(X)|\geqslant\alpha}\alpha^2P(X=x)=\alpha^2P\big(|X-E(X)|\geqslant\alpha\big).$$ □

У складу са независношћу догађаја, за случајне променљиве $X$ и $Y$ кажемо да су *независне* ако се закон расподеле променљиве $X$ не мења у зависности од променљиве $Y$.

[3] На енглеском се каже *variance*, отуда ознака.

[4] Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894), руски математичар

*Дефиниција 3.9.* Случајне променљиве $X$ и $Y$ на истом дискретном простору вероватноће су *независне* ако за све $a$ и $b$ важи
$$P(X{=}a, Y{=}b) = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b).$$

И ову дефиницију би било потребно прилагодити ако случајне променљиве $X$ и $Y$ нису дискретне. У општем случају бисмо захтевали да важи $P(X{\leqslant}a, Y{\leqslant}b) = P(X{\leqslant}a) \cdot P(Y{\leqslant}b)$. У случају дискретних променљивих ове две дефиниције су заправо еквивалентне.

*Пример 3.11.* Бачена је коцкица. Са $X$ означимо остатак при дељењу добијеног броја са 2, са $Y$ остатак при дељењу са 3, а са $Z$ остатак при дељењу са 5. Закони расподеле су овакви:
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Случајне променљиве $X$ и $Y$ су независне. Заиста, пар $(X, Y)$ узима сваку од вредности (0,0), $(0{,}1), (0{,}2), (1{,}0), (1{,}1), (1{,}2)$, с вероватноћом $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

С друге стране, променљиве $X$ и $Z$ су зависне, јер је $P(X{=}0, Z{=}0) = 0 \neq P(X{=}0) \cdot P(Z{=}0)$. Слично, и $Y$ и $Z$ су зависне.

Једнакости $E(XY) = E(X)E(Y)$ и $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ у општем случају не важе - сувише су добре да би биле истините. Ипак, оне су *условно* тачне:

*Тврђење 3.7.* Ако су случајне променљиве $X$ и $Y$ независне, важи:

(а) $E(XY) = E(X)E(Y)$; (б) $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

*Доказ.* (а) Имамо
$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot P(X{=}x, Y{=}y) = \sum_x \sum_y xy \cdot P(X{=}x)P(Y{=}y)$$
$$= \sum_x xP(X{=}x) \cdot \sum_y yP(Y{=}y) = E(X)E(Y).$$

(б) По делу (а),
$$\mathrm{Var}(X{+}Y) = E\big((X{+}Y)^2\big) - \big(E(X{+}Y)\big)^2 = E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - \big(E(X){+}E(Y)\big)^2$$
$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + E(2XY) - 2E(XY) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Као што видимо, ако искључимо претпоставку да су $X$ и $Y$ независне, важиће
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)].$$

Приметимо да је при томе
$$E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - E(XE(Y)) - E(YE(X)) + E(X)E(Y) = E\big((X{-}E(X))(Y{-}E(Y))\big).$$

*Дефиниција 3.10.* Нека су $X$ и $Y$ случајне променљиве.

Њихова *коваријанса* је $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X{-}E(X))(Y{-}E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Њихов *коефицијенӣ корелације* је $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$.

Из Коши-Шварцове неједнакости следи да је коефицијент корелације по апсолутној вредности не већи од 1. Ако су $X$ и $Y$ независне променљиве, онда оне *нису у корелацији*, тј. $\rho(X, Y) = 0$.

### 3.5. Задаци

1. Из кутије са 2 црвене, 3 зелене и 4 плаве куглице насумично бирамо три. Колика је вероватноћа да смо одабрали три куглице различитих боја?

2. Кошаркаш изводи слободна бацања 3 пута и у сваком погађа с вероватноћом 80%. Колика је вероватноћа да двапут узастопно промаши?

3. Група од осморо људи, међу којима су Јоксим и Максим, насумично је распоређена у троја кола. У прва кола стају само две особе, а у друга и трећа по три. Колика је вероватноћа да Јоксим и Максим нису у истим колима?

4. Револвераши Џим и Сем наизменично пуцају један у другог све док један од њих не погоди. Џим пуца први, али погађа с вероватноћом 40%. С друге стране, Сем погађа с вероватноћом 60%. Наћи Семове шансе да победи.

5. Из кутије са три зелене и шест белих куглица насумично извлачимо три. Бар две извучене куглице су зелене. Колика је вероватноћа да је и трећа куглица зелена?

6. Новчић је бачен 10 пута и појавило се бар 5 глава. Колика је вероватноћа да се у првом бацању појавила глава?

7. Федерер и Надал играју на три добијена сета. У првом сету обојица имају једнаке шансе, али играч који добије сет има шансу само 40% да добије и следећи сет. Ако је после три сета резултат $2:1$ за Надала, колике су Федерерове шансе да победи?

8. Решити пример 3.5 (Монти Холов задатак).

9. У воћњаку гајимо јабуке и крушке. Ако је родила јабука, вероватноћа је 70% да је родила и крушка. Ако је родила крушка, вероватноћа је 80% да је родила и јабука.

   У воћњаку је бар нешто родило. Колика је вероватноћа да је родила крушка?

10. Из кутије у којој се налазе две црвене, три зелене и четири жуте куглице случајним избором извлачимо три куглице. Ако су две куглице исте боје, колика је вероватноћа да је трећа куглица зелена?

11. Бацили смо коцкицу двапут.

    (а) Која је очекивана вредност разлике између два добијена броја (у апсолутној вредности)?

    (б) Колика је дисперзија ове разлике?

12. Из скупа $\{1,2,3,4,5\}$ смо случајно одабрали подскуп $A$ (може бити и празан или цео скуп). Случајна променљива $X$ означава најмањи елемент скупа $A$. Одредити:

    (а) очекивану вредност;
    (б) стандардну девијацију променљиве $X$.

13. Из скупа $\{1,2,\dots,n\}$ рандом су извучена три различита броја. Која је очекивана вредност најмањег од та три броја?

14. Из кутије са 2 црвене, 3 зелене и 5 плавих куглица насумично извлачимо пет куглица. Нека је $X$ број извучених црвених, а $Y$ број извучених зелених куглица. Одредити коефицијент корелације $\rho(X,Y)$.

15. Двапут бирамо рандом број из скупа $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\dots,\sqrt{100}\}$: први пут смо одабрали $X$, а други пут $Y$. Наћи коефицијент корелације између случајних променљивих $X$ и $X+Y$.

16. *(Проблем сакуūљања сличица)* Треба да сакупимо 100 сличица за албум. Сличице се набављају куповином чоколадица неке врсте, где уз сваку чоколадицу долази једна рандом сличица. Која је очекивана вредност броја чоколадица које треба да купимо да бисмо попунили цео албум?

### 3.6. Решења

1. Број начина да одаберемо три куглице из кутије је $\binom{9}{3}=84$. Број начина да одаберемо једну црвену, једну зелену и једну плаву куглицу је $2\cdot 3\cdot 4=24$. Тражена вероватноћа је $\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$.

2. Исходи који нас интересују су $+--$, $--+$ и $---$. Вероватноћа исхода $+--$ је $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$. Иста толика је и вероватноћа исхода $--+$, док исход $---$ има вероватноћу $(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{125}$. Према томе, укупна вероватноћа је $\frac{4}{125}+\frac{4}{125}+\frac{1}{125}=\frac{9}{125}=7{,}2\%$.

3. Посматрајмо само пар седишта на којима су Јоксим и Максим. Могућих парова седишта има $\binom{8}{2}=28$. Парова у којима су оба седишта у истим колима има $1+2\cdot 3=7$, што даје вероватноћу $\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$.

4. Означимо Семове шансе са $p$.

   Џим убија Сема првим метком с вероватноћом $\frac{2}{5}$. С друге стране, Џим маши и Сем га убија својим првим метком с вероватноћом $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. Најзад, с вероватноћом $1 - \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{6}{25}$ обојица су промашили и сада су опет у полазној позицији, у којој Сем има шансе $p$.

   Све у свему, вероватноћа да Сем победи је $\frac{9}{25} + \frac{6}{25}p$. Следи да је $p = \frac{9}{25} + \frac{6}{25}p$, тј. $p = \frac{9}{19} \approx 47{,}4\%$.

5. Исхода у којима су бар две куглице зелене има $\binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{3}{3} = 19$, а оних у којима су све три зелене само један. Зато је условна вероватноћа $P(ZZZ \mid ZZ) = \frac{1}{19}$.

6. Могућих исхода има $2^{10}$. Исхода у којима бар 10 пута пада глава има $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \cdots + \binom{10}{10} = 638$.

   Међу овим исходима, оних у којима је први пут пала глава (и у осталих 9 бацања бар још 4 главе) има $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \cdots + \binom{9}{9} = 382$. Према томе, условна вероватноћа да се ово десило једнака је $\frac{382}{638} \approx 0{,}599$.

7. Могућа кретања резултата су $H_1$ : ННФ, $H_2$ : НФН и $H_3$ : ФНН. Са $A$ означавамо Федерерову победу у мечу.

   - $P(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$. У овом случају Федерер мора да добије још два сета, а шансе су му $P(A \mid H_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.
   - $P(H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. У овом случају Федерерове шансе су $P(A \mid H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$.
   - $P(H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$ и опет $P(A \mid H_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$.

   Вероватноћа догађаја $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 = 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}42$. Дакле, $P(A \mid H)P(H) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3) = 0{,}16 \cdot 0{,}12 + 0{,}24 \cdot 0{,}18 + 0{,}24 \cdot 0{,}12 = 0{,}0912$, одакле је $P(A \mid H) = \frac{0{,}0912}{0{,}42} = \frac{38}{175} \approx 21{,}7\%$.

8. Не треба да се збунимо. Такмичар је имао вероватноћу $\frac{1}{3}$ да одабере исправна врата, а водитељ то није променио тиме што му је, у зависности од такмичаревог избора, показао нека врата без награде - шанса да је такмичар погодио још увек је $\frac{1}{3}$. То пак значи да је шанса $\frac{2}{3}$ да је награда иза *оних других*, неотворених врата. Дакле, боље је одабрати она друга врата.

9. Означимо са $J$ и $K$ род јабуке, односно крушке; $J \cap K$ значи да су родиле и јабука и крушка, $J \setminus K$ да је родила само јабука, итд.

   Означимо $x = P(J \cap K)$. Дато нам је $x = 0{,}7 \cdot P(J) = 0{,}8 \cdot P(K)$. Следи да је $P(K) = \frac{5}{4}x$, $P(J) = \frac{10}{7}x$ и $P(J \setminus K) = P(J) - P(J \cap K) = \frac{3}{7}x$. Према томе, вероватноћа да је родила бар једна воћка је $P(K) + P(J \setminus K) = \frac{47}{28}x$. При овом догађају, вероватноћа да је родила крушка је $\frac{P(K)}{P(K)+P(J\setminus K)} = \frac{35}{47}$.

10. Исхода са три куглице различитих боја има $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, а оних у којима су неке две истобојне има $\binom{9}{3} - 24 = 60$.

    Пребројмо исходе у којима су две куглице исте боје а трећа зелена. Исхода са две црвене и зеленом куглицом има 3, оних са три зелене само 1, а оних са две плаве и зеленом $3\binom{4}{2} = 18$: укупно 22.

    Тражена вероватноћа је $\frac{22}{60} = \frac{11}{30}$.

11. Означимо добијене бројеве са $X$ и $Y$ и $D = |X - Y|$.

    Разлика $D = 0$ се добија у 6 могућих исхода (11,22,..., 66), $D = 1$ у 10 исхода (12,21,23,32,..., 56,65), итд: $D = 2, 3, 4, 5$ редом у 8, 6, 4 и 2 исхода.

    Очекивана вредност разлике $D$ је $E(D) = \frac{6\cdot0+10\cdot1+8\cdot2+6\cdot3+4\cdot4+2\cdot5}{36} = \frac{35}{18}$.
    Дисперзија је $\mathrm{Var}(D) = E(D^2) - E(D)^2 = \frac{6\cdot0+10\cdot1+8\cdot4+6\cdot9+4\cdot16+2\cdot25}{36} - (\frac{35}{18})^2 = \frac{110}{81}$.

12. За $1 \leqslant X \leqslant 5$, вероватноћа да је најмањи елемент подскупа једнак $X$ је $2^{-X}$ (подскуп треба да садржи $x$, а да не садржи $1, 2, \ldots, X-1$).

    Очекивана вредност броја $X$ је $\sum_{X=1}^{5} X \cdot 2^{-X} = \frac{57}{32} = 1{,}78125$.

    Очекивана вредност броја $X^2$ је $\sum_{X=1}^{5} X \cdot 2^{-X} = \frac{141}{32}$. Дисперзија је $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1263}{1024}$, а стандардна девијација $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{32}\sqrt{1263} \approx 1{,}11$.

13. Три броја се могу одабрати на укупно $\binom{n}{3}$ начина. Означимо најмањи од њих са $X$.

    Ако је $X \geqslant k$, онда та три броја чине подскуп скупа $\{k, k+1, \dots, n\}$, а таквих подскупова има $\binom{n-k+1}{3}$. Вероватноћа да се то деси је $\binom{n-k+1}{3}/\binom{n}{3}$.

    По тврђењу 3.4, тражена очекивана вредност је $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k+1}{3}$.

    Подсетимо се и тврђења 2.5 које нам омогућује да одредимо ову суму: $E(X) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \binom{n+1}{4} = \frac{n+1}{4}$.

14. Прво нађимо $E(X)$ и $E(Y)$. Има $\binom{10}{5} = 252$ начина да се одабере пет куглица. При томе је број могућности у којима је $X = x$ и $Y = y$ за $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 3$ једнак $\binom{2}{x}\binom{3}{y}\binom{5}{5-x-y}$. То приказује табела:

| | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ | $Y=3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X=0$ | 1 | 15 | 30 | 10 |
| $X=1$ | 10 | 60 | 60 | 10 |
| $X=2$ | 10 | 30 | 15 | 1 |

    Видимо да је $E(X) = \frac{56\cdot 0 + 140\cdot 1 + 56\cdot 2}{252} = 1$ и $E(Y) = \frac{21\cdot 0 + 105\cdot 1 + 105\cdot 2 + 21\cdot 3}{252} = \frac{3}{2}$.

    Даље, $E(X^2) = \frac{56\cdot 0 + 140\cdot 1 + 56\cdot 4}{252} = \frac{13}{9}$ и $E(Y^2) = \frac{21\cdot 0 + 105\cdot 1 + 105\cdot 4 + 21\cdot 9}{252} = \frac{17}{6}$, тако да је $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4}{9}$ и $\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{12}$.

    Такође, $XY = 0$, 1, 2, 3, 4, 6 редом у 76, 60, 90, 10, 15, 1 случајева, па рачунамо $E(XY) = \frac{4}{3}$. Одавде је $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{6}$.

    Најзад, $\rho(X,Y) = -\frac{1}{6} / \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \approx -0{,}327$.

15. Случајне променљиве $X$ и $Y$ су независне, па је $E(XY) = E(X)E(Y)$ и $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 2\mathrm{Var}(X)$. Такође је $\mathrm{Cov}(X, X+Y) = E(X(X+Y)) - E(X)E(X+Y) = E(X^2) + E(XY) - E(X)^2 - E(X)E(Y) = \mathrm{Var}(X)$.

    Пошто је $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X)$, следи да је $\rho(X, X+Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, X+Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(X+Y)}} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{2\mathrm{Var}(X)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

    Детаљи расподела променљивих $X$ и $Y$ су се показали неважним.

16. Са $X_i$ ћемо означити број чоколадица које треба да купимо да бисмо, након што смо већ сакупили $i$ сличица, набавили неку нову. Укупан број чоколадица $X$ које треба да купимо записаћемо као збир случајних променљивих $X_0 + X_1 + \cdots + X_{99}$.

    Нађимо $X_i$. Нова, $(i+1)$-ва сличица појавиће се с вероватноћом $p = \frac{100-i}{100}$. Очекивани број $X_i$ чоколадица које морамо да купимо показује нам пример 3.9 и једнак је $X_i = \frac{1}{p} = \frac{100}{100-i}$.

    Дакле, $X = \sum_{i=0}^{99} \frac{100}{100-i} = 100(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{100}) \approx 518{,}74$.