Машински факултет, Београд 18.11.2021.

Други колоквијум из Математике 1 - задаци са ранијих рокова

Група 1

1. Израчунати $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

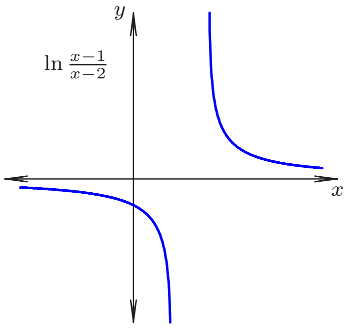
   Коришћењем Маклоренових развоја $\sin x = x + o(x)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ кад $x \to 0$ добијамо
   $$\sqrt{1+x\sin x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\cos x} = \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)}.$$
   Затим се може користити Маклоренов развој $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$:
   $$\sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{и} \quad \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$
   Дакле,
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{4}{3}.$$

2. Израчунати граничну вредност $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x^3 - 1}{(x-\sin x)^2}$.

   На основу Маклоренових развоја $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ кад $x \to 0$ је
   $$L = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x^6}{2} - 1 + o(x^6)}{\left(x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} = 18.$$

3. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2}$.

   Домен функције је $\frac{x-1}{x-2} > 0$, тј. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Даље је $f(x) \geqslant 0$ за $\frac{x-1}{x-2} \geqslant 1$, тј. за $\frac{1}{x-2} \geqslant 0$.

   Следи да $f(x)$ нема нула, негативна је за $x < 1$ и позитивна за $x > 2$.

   Функција има вертикалну асимптоту за $x = 1$ (са леве стране) и за $x = 2$ (са десне стране), јер је $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$. Права $x = 0$ је хоризонтална асимптота, јер је $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.

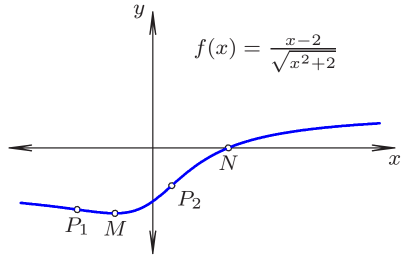
   Први извод је $f'(x) = -1/(x^2-3x+2)$, па функција нема екстремних вредности и опада на домену.

   Други извод је $f''(x) = (2x-3)/((x-1)^2(x-2)^2)$, па функција нема превојних тачака ($x = 3/2$ је ван домена), конкавна је за $x < 1$ и конвексна за $x > 2$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$.

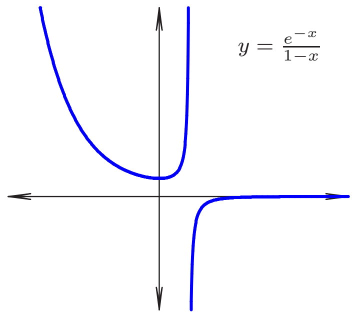
   Домен функције $f(x)$ је цео скуп $\mathbb{R}$, јер је $x^2+2 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$; једина нула је тачка $N(2,0)$. Да бисмо проверили да ли дата функција има асимптоте, посматрамо лимес
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+2/x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2/x}{\operatorname{sgn} x\sqrt{1+2/x^2}} = \pm 1,$$
   па $f(x)$ има хоризонталу асимптоту $y = 1$ кад $x \to \infty$, односно $y = -1$ кад $x \to -\infty$.

   Први извод је $f' = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2)^{3/2}}$, па је $f' < 0$ за $x < -1$ и ту функција опада, $f' > 0$ за $x > -1$ и ту функција расте, а тачка $M(-1, -\sqrt{3})$ локални минимум функције.

   Други извод је $f'' = \dfrac{-4x^2-6x+4}{(x^2+2)^{5/2}} = -\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+2)^{5/2}}$. Дакле, $f'' < 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (1/2, \infty)$ и ту је функција конкавна, $f'' > 0$ за $x \in (-2, 1/2)$ и ту је функција конвексна; превојне тачке су $P_1(-2, -2\sqrt{2/3})$ и $P_2(1/2, -1)$.

5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.



Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f > 0$ за $x < 1$ и $f < 0$ за $x > 1$. Функција нема нула, није ни парна ни непара. Права $x = 1$ је вертикална асимптота, јер је $\lim\limits_{x \to 1\pm} f(x) = \mp\infty$.

Даље је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота кад $x \to \infty$.
Први извод је $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$, па функција опада за $x < 0$, расте за $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и има минимум у тачки $M(0, 1)$.

Други извод је $f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2+1)}{(1-x)^3}$, па је функција конвексна за $x < 1$ и конкавна за $x > 1$.

6. Развити у Маклоренов полином петог степена функцију $\ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

На основу формуле $x^5 - 1 = (x - 1)(1 + x^2 + x^3 + x^4)$ је $\ln(1 + x^2 + x^3 + x^4) = \ln(1 - x^5) - \ln(1 - x)$. Сада користимо Маклорнов полином $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ кад $x \to 0$, па је тражени полином

$$T_5(x) = -x^5 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^5}{5}.$$

7. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $y = y(x)$ дату једначином $x + y = \operatorname{arctg}(xy)$.

Прво приметимо да је $y = 0$ за $x = 0$. Диференцирањем дате једначине (по x) добијамо

$$1 + y' = \frac{y + xy'}{1 + (xy)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ добијамо $y'(0) = -1$. Даљим диференцирањем добијамо

$$y'' = \frac{(y' + y' + xy'')(1 + (xy)^2) - (y + xy')2xy(y + xy')}{(1 + (xy)^2)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ и $y'(0) = -1$ добијамо $y''(0) = -2$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x) = -x - x^2$.

Рада Мутавџић Ђукић