11.12.2020.

Задаци из другог дела градива за припрему предрока - смене 6 и 7

1. Написати једначину нормале на криву

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln^2 \sqrt{x-1}}$$

у тачки у којој је $x = 10$.

2. За криву дату параметарски $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ наћи нагиб (извод) за $t = 2\pi/3$.

3. Израчунати граничне вредности

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + 1/x\right)\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x \sin 3x}, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{tg} x}{\sin x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2 x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \mathrm{arctg} x}{x^3}, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

4. Наћи домен и асимптоте функције

$$y = \frac{2^x+1}{2^x-1}, \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1.$$

5. Испитати ток и скицирати график функције

$$y = (2x-1)e^{-1/x}, \quad y = \frac{\ln^2(x-2)}{x-2}, \quad y = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)}, \quad y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},$$
$$y = x - 1 - \sqrt{x^2 - x}.$$

6. Апроксимирати функцију $\ln(1 + x - x^2)$ Маклореновим полиномом четвртог степена.

7. Апроксимирати функцију

$$y = (x^2 - 1)e^{-2x}$$

Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу $[0, 1]$.

8. Апроксимирати функцију

$$y = \sqrt[5]{2x-1}$$

Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке $a = 1$. Користећи овај полином приближно израчунати $\sqrt[5]{1,1}$ и проценити грешку.

9. Имплицитно дату функцију $y \cos y = x$, при чему је $y(0) = 0$, апроксимирати Маклореновим полиномом трећег степена.

Решења

1. Нека је $f(x) = \sqrt{x-1}$ и $g(x) = \ln^2\sqrt{x-1} = \left(\frac{1}{2}\ln(x-1)\right)^2 = \frac{1}{4}\ln^2(x-1)$. Тада је $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $g'(x) = \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}$, па је

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot\ln^2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1}\cdot\frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}}{\ln^4\sqrt{x-1}} = \frac{\ln\sqrt{x-1}-2}{2\sqrt{x-1}\ln^3\sqrt{x-1}}.$$

Даље је $y'(10) = \frac{\ln 3 - 2}{6\ln^3 3}$. Приметимо још да је $y(10) = \frac{3}{\ln^2 3}$. Заменом ових вредности у једначину нормале $y - y(10) = -\frac{1}{y'(10)}(x-10)$ добијамо

$$y - \frac{3}{\ln^2 3} = \frac{6\ln^3 3}{2-\ln 3}(x-10).$$

2. Овде је $dx/dt = 1-\cos t$ и $dy/dt = \sin t$, па је $y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$. Даље је $x(2\pi/3) = 3/2$ и $y'(3/2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ кад $t \to 0$ (мало „о” од $f(t)$ је функција за коју важи $o(f(t))/f(t) \to 0$ кад $t \to 0$ тј. $o(f(t))$ је занемарљиво мала у поређењу са $f(t)$) имамо

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x + \frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену $x = 1/t, t \to 0$, дати лимес се своди на

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \underset{(0/0)}{\overset{\text{л.п.}}{=\!=}} \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Задатак ћемо решити свођењем на познати лимес $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{\sin^4\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^4\frac{x}{2}}{2^4\left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{1}{8}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\sin t = t + o(t^2)$ кад $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 x}{x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x\sin 3x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x(3x+o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

г)

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{1/\mathrm{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\ln\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} -\frac{\ln\cos x}{\mathrm{tg}^2 x}}.$$

Применом Лопиталовог правила на последњи лимес добијамо

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/\cos x}{2\mathrm{tg} x/\cos^2 x}} = \sqrt{e}.$$

д)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\mathrm{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-1/2}-(1+x^2)^{-1}}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)+(1+x^2)^{-2}2x}{6x}=\frac{1}{2}.$$

ђ) Користимо познати лимес $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{(x-2)\frac{3x}{x-2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}}=e^3.$$

е) Користимо Маклоренове развоје $\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ и $\ln(1+t)=t+o(t)$ кад $t\to 0$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=-\frac{1}{6}.$$

4. а) Домен функције је $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Видимо да је
$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{2^x+1}{2^x-1}=\pm\infty,$$
па је права $x=0$ вертикална асимптота. Даље је
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+1}{2^x-1}=-1,$$
тј. права $y=-1$ је хоризонтална асимптота кад $x\to-\infty$. Слично је
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}=1,$$
па је права $y=1$ хоризонтална асимптота кад $x\to\infty$.

б) Домен ове функције је $\frac{x^3}{x+1}\geqslant 0$, тј. $(-\infty,-1)\cup[0,\infty)$. Права $x=-1$ је вертикална асимптота, јер је
$$\lim_{x\to-1-}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1=\infty.$$
Да бисмо одредили понашање функције кад $x\to\pm\infty$, можемо користити Маклоренов полином функције $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+o(t)$ кад $t\to 0$:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}+x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{2(x+1)}+o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x-\frac{3}{2}+o(1)\right),$$
па је права $y=2x-\frac{3}{2}$ коса асимптота кад $x\to\infty$. Слично,
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}+x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1-\frac{1}{2(x+1)}+o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)+x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right),$$
па је права $y=-\frac{1}{2}$ хоризонтална асимптота кад $x\to-\infty$.

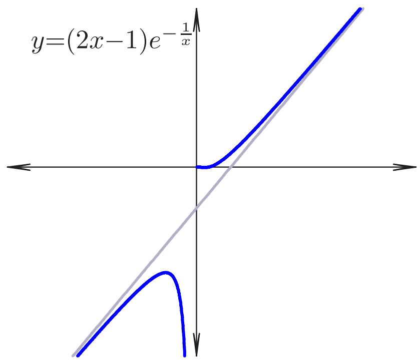
5. Домен функције је $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, нула функције је $N(1/2,0)$, $y<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/2)$ и $f(x)>0$ за $x\in(1/2,\infty)$. Права $x=0$ је вертикална асимптпта са леве стране, јер је

$$\lim_{x\to0+}y(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to0-}y(x)=-\infty.$$

Кад $x\to\pm\infty$ можемо користити Маколренов развој $e^t=1+t+o(t)$ кад $t\to0$:

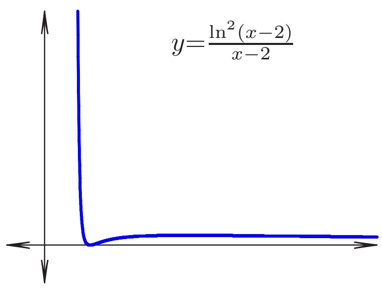
$$\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)e^{-1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(2x-3+o(1)),$$

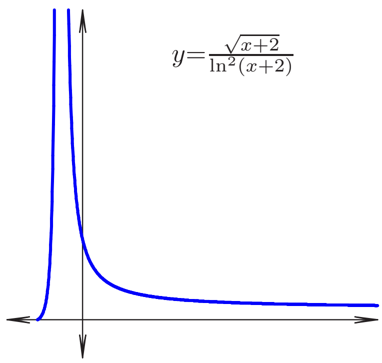
па је права $y=2x-3$ коса асимптота кад $x\to\pm\infty$.

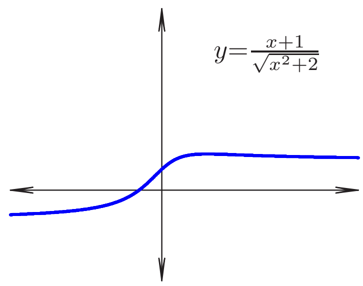


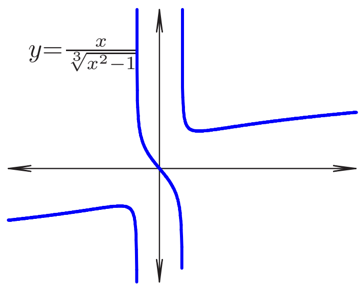
Даље је $y'(x)=e^{-1/x}\frac{2x^2+2x-1}{x^2}$, па $y\nearrow$ за $x\in(-\infty,-(1+\sqrt{3})/2)\cup((\sqrt{3}-1)/2,\infty)$ и $y\searrow$ за $x\in(-(1+\sqrt{3})/2,0)\cup(0,(\sqrt{3}-1)/2)$. Тачка $(-(1+\sqrt{3})/2,y(-(1+\sqrt{3})/2))$ је локални максимум функције, а тачка $((\sqrt{3}-1)/2,y(\sqrt{3}-1)/2))$ је локални минимум функције.

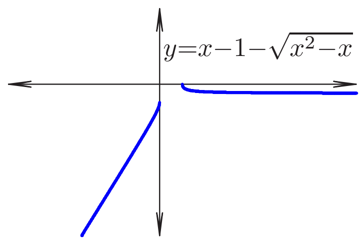
Други извод је $y''=e^{-1/x}\frac{4x-1}{x^4}$, па је y конкавна за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/4)$ и конвексна за $x\in(1/4,\infty)$. Функција има превој у тачки $(1/4,y(1/4))$.











6. Користимо познати развој $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+o(t^4)$ кад $t\to0$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x-x^2)&=x-x^2-\frac{(x-x^2)^2}{2}+\frac{(x-x^2)^3}{3}-\frac{(x-x^2)^4}{4}+o\left((x-x^2)^4\right)\\&=x-x^2-\frac{1}{2}\left(x^2-2x^3+x^4\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-3x^4\right)-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\&=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{4}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

7. Првих пет извода су $y'(x)=-2e^{-2x}(x^2-x-1)$, $y''(x)=2e^{-2x}(2x^2-4x-1)$, $y'''(x)=-4e^{-2x}(2x^2-6x+1)$, $y^{(4)}(x)=16e^{-2x}(x^2-4x+2)$ и $y^{(5)}(x)=-32e^{-2x}(x^2-5x+4)$. Даље је $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=-4$ и $y^{(4)}(0)=32$, па је Маклоренов полином четвртог степена

$$T_4(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^4(0)}{4!}x^4, \quad \text{тј.} \quad T_4(x)=-1+2x-x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{3}x^4.$$

Грешка апроксимације је

$$R_4(x) = \frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5, \quad \text{за} \quad t \in (0,x), \quad \text{при чему је} \quad x \in [0,1].$$

За оцену грешке, нађимо максимум функције $|y^{(5)}(t)|$ за $t \in (0,1)$ и узимамо да је x=1:

$$\max_{t\in(0,1)} |-32e^{-2t}(t^2-5t+4)| < 32e^0 \cdot 4 = 128, \quad \text{па је} \quad |R_4(1)| < \frac{16}{15} \quad \text{за} \quad x \in [0,1].$$

8. Прва четири извода су $y'(x) = \frac{2}{5}(2x-1)^{-4/5}$, $y''(x) - \frac{16}{25}(2x-1)^{-9/5}$, $y'''(x) = \frac{288}{125}(2x-1)^{-14/5}$ и $y^{(4)}(x) = -8064/625(2x-1)^{-19/5}$. Тејлоров полином трећег степена у тачки $a = 1$ је

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3, \quad \text{тј.}$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{8}{25}(x-1)^2 + \frac{48}{125}(x-1)^3.$$

Даље је $y(1,1) \approx T_3(1,1) = 1,037184$. За $1 < t < 1,1$ је $(2t-1)^{-19/5} < 1$, па је

$$|R_3(1,1)| < \frac{1}{4!}\frac{8064}{625} \cdot 0,1^4 \approx 5,4 \cdot 10^{-5}.$$

9. Диференцирањем (по x) једначине $y\cos y = x$ (y је функција која зависи од x) добијамо $y'\cos y - yy'\sin y = 1$, одакле је $y' = \frac{1}{\cos y - y\sin y}$. Даљим диференцирањем добијамо $y'' = (2\sin y + y\cos y)y'^3$ и $y''' = (3\cos y - y\sin y)y'^4 + 3(2\sin y + y\cos y)y'^2y''$. За $x = 0$ и $y = 0$ добијамо $y' = 1$, а затим $y'' = 0$ и $y''' = 3$. Дакле, Маклоренов полином трећег степена је $T_3(x) = x + \frac{1}{2}x^3$.

Рада М.Ђ.