ИТМ – Дискретна математика

Душан Ђукић

5. Теорија графова

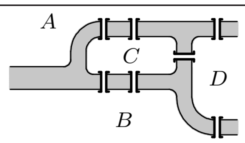
5.1. Увод

Граф је математичка структура која се састоји од *темена*, која представљају некакве објекте, и *грана* које повезују неке парове ових темена. Графове срећемо свуда. Осим у нпр. саобраћајним мрежама, у новијим технологијама су од кључне важности у моделирању рачунарских, друштвених и комуникационих мрежа и дизајнирању софтвера. Чак су и хемијска једињења графови.

Формално, граф $G = G(V, E)$ се може задати (непразним) скупом темена V и скупом грана E. Ограничићемо се на *коначне* графове, тј. оне са коначно много темена и грана - бесконачни графови су чудни објекти и многа стандардна тврђења теорије графова за њих не важе.

Зачетак теорије графова приписује се Ојлеру и његовом чувеном *задатку о Кенигсбершким*[1] *мостовима* из 1736. године:

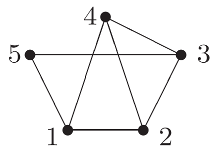
Кенигсберг лежи на обе стране реке Прегел и укључује две аде. Ови делови града повезани су помоћу седам мостова као на слици. Треба наћи путању кроз град која прелази сваки мост тачно једном.



Покушајте, али без варања - реку можете прећи само мостом (не препливати или прескочити), а кад год крочите на мост, пређите га до краја.

Где је у овом задатку граф? Цео Кенигсберг је граф - његова темена су његова четири дела A, B, C и D, док су гране мостови између њих. Запажамо да је теме C повезано с теменима A и B двоструким гранама. Ојлеров задатак је да се прошета овим графом тако да се сваком граном прође по једном. Вратићемо се на њега мало касније.

Граф је свакако најлакше замислити као скуп тачака (темена), међу којима су неки парови повезани линијом (граном). Међутим, у информатици граф тешко можемо да унесемо као дијаграм са тачкицама и цртицама, па уместо њега користимо *матрицу инциденције*. То је симетрична бинарна квадратна матрица чије врсте и колоне одговарају теменима графа. У пресеку i-те врсте и j-те колоне уписан је број 1 ако су темена i и j суседна, односно број 0 ако нису.



$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

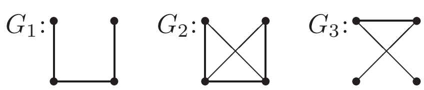
Дефиниција 5.1. Подграф графа G је граф добијен брисањем неких његових темена и/или грана.

Подграф графа G је *разапињући* ако садржи сва темена графа G.

Индукован подграф је граф који се добија уклањањем неких темена графа, као и свих грана у тим теменима, притом чувајући све постојеће гране између преосталих темена.

Комплемент $\bar{G}$ графа G је граф са истим теменима као G, али са тачно оним гранама којих нема у графу G.

Пример 5.1. Граф G_1 је подграф графа G_2 (добија се уклањањем неколико грана графа G_2), али није индукован подграф. Граф G_3 је комплемент графа G_1.



5.2. Степен темена; изоморфизам

Темена u и v у графу зовемо *суседним* ако су повезани граном - ту грану бисмо означавали са $\{u, v\}$ или само uv. Мада су у ширем смислу дозвољене и гране које спајају теме са самим собом,

[1]Кенигсберг, данас Калињинград у Русији, био је главни град некадашње Пруске

познате као *петље*, или вишеструке гране између два темена (попут оних у Кенигсбергу), овакве гране нису сасвим „по прописима”. Графове у којима оваквих аномалија нема зовемо *простим*.

три гране од A до B и петља у B

Дефиниција 5.2. Степен $d(v)$ темена v у графу је број грана које излазе из њега. Петље у овом темену се броје двапут.

Дакле, на горњој слици је $d(A) = 3$ и $d(B) = 5$.

Замислимо за тренутак темена графа као људе на неком дружењу, а гране као руковања међу њима - неки парови су се руковали, а неки нису. Зна се колико се пута која особа руковала. Колико је укупно било руковања? Одговор даје једноставно тврђење познато под именом *лема о руковању.*

Тврђење 5.1. Збир степена свих темена у графу једнак је двоструком броју грана: $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$.

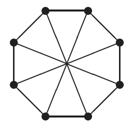
Доказ. Збир $\sum_{v\in V} d(v)$ представља укупан број грана у графу, при чему је свака грана бројана двапут - по једном за свако теме. Дакле, овај збир је једнак $2|E|$. $\square$

Последица 5.2. У сваком графу број темена непарног степена је паран. $\square$

Пример 5.2. У неком графу свако теме има степен 3. Може ли тај граф да има (а) 7 темена? (б) 8 темена?

Решење. (а) Такав граф, ако постоји, имао би тачно 7 темена непарног степена, а то је немогуће по Последици 5.2.

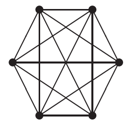
(б) Може, а на слици десно видите и пример.

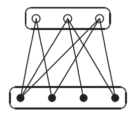


Значајна су нам два специјална типа графова.

Комплетан граф је граф у коме су свака два темена повезана граном. Комплетан граф са n темена има $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ грана и често га означавамо са K_n.

Граф је k-*партитан* ако се његова темена могу поделити у k дисјунктних подскупова (*партиција*) $V_1, V_2, \ldots, V_k$ тако да нема грана унутар истог подскупа. Посебно су нам важни 2-партитни, тј. *бипартитни* графови. Бипартитан граф можемо да замислимо као граф у коме су сва темена бела или црна и свака грана повезује једно бело и једно црно теме.


комплетан граф


бипартитан граф

Граф се може представити дијаграмски на визуелно различите начине и није увек лако одгонетнути да ли два дијаграма представљају исти граф.

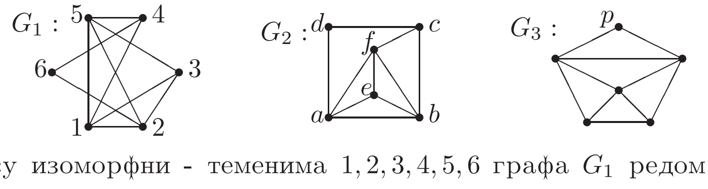
Дефиниција 5.3. Прости графови $G(V, E)$ и $G'(V', E')$ су *изоморфни* ако постоји бијекција $f : V \to V'$ која чува суседност. Тада је пресликавање f *изоморфизам* између графова G и G'.

Другим речима, ако је f изоморфизам, то значи да је $f(u)f(v)$ грана у графу G' ако и само ако је uv грана у графу G.

Изоморфни графови свакако имају исти број темена $|V|$ и исти број грана $|E|$. Зато за ове две величине кажемо да су *инваријанте* у односу на изоморфизам. Низ стемена темена (у нерастућем поретку) је такође инваријанта.

И матрица инциденције даје суптилан увид у структуру графа, и мада она сама по себи није инваријанта, њен карактеристични полином (*карактеристични полином графа*) јесте.

Пример 5.3. На слици су приказана три графа са теменима степена $4, 4, 4, 3, 3, 2$.



Графови G_1 и G_2 су изоморфни - теменима $1, 2, 3, 4, 5, 6$ графа G_1 редом одговарају темена b, a, e, c, f, d графа G_2.

С друге стране, граф G_3 им није изоморфан. Заиста, ако изоморфизам постоји, он би сликао теме 6 графа G_1 у теме p графа G_3 (то су једина темена степена 2 у овим графовима), али то није могуће, јер два суседа темена 6 нису повезана граном, а два суседа темена p јесу.

5.3. Пут, циклус и дрво

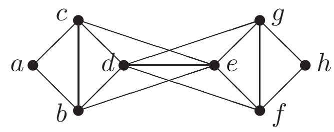
Дефиниција 5.4. *Путања* је низ међусобно различитих грана које се надовезују једна на другу.

Пут је путања која не пролази ни кроз једно теме двапут. Другим речима, то је низ различитих темена $v_0v_1 \dots v_n$ у коме су v_{i-1} и v_i суседни за свако i.

Граф је *повезан* ако између свака два темена постоји пут. Сваки граф се састоји од повезаних делова - *компонената*. Дакле, компонента графа је било који његов максималан повезан подграф.

Под *дужином* пута подразумевамо број грана у њему. Тако је дужина пута $v_0v_1 \dots v_n$ једнака n. На овај начин за свака два темена графа u и v можемо да дефинишемо њихово *растојање* као дужину најкраћег пута који повезује u и v.

Пример 5.4. У графу на слици од темена a до темена h може се стићи путем дужине 4 (на пример $acefh$), али не може краћим путем. То значи да је растојање између a и h једнако 4.



Пошто смо увели растојање, има смисла говорити и о *дијаметру* и *радијусу* графа, под условом да је он повезан. Дијаметар би био растојање између два најудаљенија темена.

Пример 5.5. Фејсбук је нека врста графа: темена су корисници, а гране „пријатељства". Својевремено је кружила прича да се у Фејсбуку свака два корисника могу повезати преко највише пет посредника. Ако је то тачно, значило би да дијаметар Фејсбука није већи од 6.

Радијус је најмањи број r за који постоји теме v (звано *центар* графа) од кога се до сваког другог темена може стићи путем дужине не веће од r. Центар графа не мора бити јединствен - ово није геометрија. Јасно је да радијус није већи од дијаметра.

Дефиниција 5.5. *Циклус* је затворена путања. Циклус је *прост* ако су у њему сва темена различита (осим првог и последњег, која се поклапају). Као и код пута, дужина циклуса је број грана које га чине.

У *тежинском графу* свакој грани је придружена нека вредност. Те вредности могу да представљају, рецимо, дужине или капацитете. Тада дужина пута није просто број грана, већ збир дужина одговарајућих грана. Ни матрица инциденције више није бинарна, већ се у пресеку i-те врсте и j-те колоне налази вредност гране између темена i и j, ако она постоји. У применама често искрсавају овакви графови. Један такав случај је *проблем путујућег трговца*:

> Дато је неколико градова и позната су растојања између свака два града. Како одредити најкраћу путању којом трговац може да обиђе све градове, сваки по једном, и врати се у полазни град?

Најдиректнији, а вероватно и најгори приступ био би испитивање свих $n!$ пермутација градова „главом кроз зид". Овакав алгоритам захтева $O(n!)$ операција, што га чини непрактичним већ за 20-ак градова.

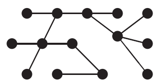
Боље резултате даће *Белман-Хелд-Карпов алгоритам* (1962), као једна од најранијих примена динамичког програмирања. Овај алгоритам захтева $O(n^2 2^n)$ операција, што је много боље од надекспоненцијалног $O(n!)$.

Дакле, означимо градове са $1, 2, \dots, n$ и прогласимо град 1 за полазни. Идеја алгоритма је одређивање, за сваки скуп $S \subset \{2, \dots, n\}$ и град x ван скупа S, најкраће путање $1 \to S \to x$ - тј. која полази из града 1, обилази цео скуп S и завршава у граду x. Како за дате S и x одредити ову путању? Укратко, ако би $y \in S$ био (нема тренутно непознат) претпоследњи град у тој путањи, претходно смо већ нашли и сачували податке о најкраћим путањама $1 \to S \setminus \{y\} \to y$, за сваки могући град y. Путања $1 \to S \to x$ биће најкраћа међу свим оваквим путањама $1 \to S \setminus \{y\} \to y$ допуњених путем $y \to x$.

Цена коју морамо да платимо при имплементацији овог алгоритма је чување веома велике количине података - најкраћих путања $1 \to S \to x$ за $O(2^n)$ скупова S.

Дефиниција 5.6. *Дрво* је повезан граф у коме нема циклуса. *Лист* је теме дрвета које је степена 1.

У дрвету између свака два темена постоји пут, и тај пут мора бити јединствен (ако их има два, онда ће њихови делови формирати бар један циклус).



Тврђење 5.3. Дрво са n темена има тачно $n-1$ грана.

Доказ. Индукција по n. Обришимо неку грану ab. Како нема циклуса, овим смо дрво пресекли на два дрвета. Ако та два дрвета имају k и $n-k$ темена, она по индуктивној претпоставци имају $k-1$ и $n-k-1$ грана. Следи да полазно дрво има $(k-1)+(n-k-1)+1=n-1$ грана. □

Последица 5.4. Свако дрво има бар два листа.

Доказ. Ако дрво са n темена има k листова, осталих $n-k$ темена имају степен бар 2, па је збир степена свих темена $2n-2=2|E|\geqslant k+2(n-k)=2n-k$, тј. $k\geqslant 2$. □

Последица 5.5. У графу са n темена и бар n грана постоји циклус. □

Разапињуће дрво графа је дрво које се састоји од свих његових темена и неких његових грана.

Тврђење 5.6. Сваки повезан граф има разапињуће дрво.

Доказ. Нека је v_1 произвољно теме. За свако $k=2,\dots,n$, одаберимо теме v_k тако да има бар једног суседа v_i за $i<k$ и нацртајмо тачно једну такву грану v_iv_k. □

Тврђење 5.7. Граф је бипартитан ако и само ако је сваки његов циклус парне дужине.

Доказ. Ако је граф бипартитан, у сваком циклусу темена ће бити наизменично црна и бела, те он мора бити парне дужине.

Размотримо сада други смер - у графу G сви циклуси су парне дужине. Обојићемо сваку његову компоненту. Почнимо од произвољног темена a - обојимо га црном бојом. За свако друго теме b посматрајмо пут између a и b и обојимо га црно ако му је дужина парна, а бело ако је непарна. Важно је приметити да не можемо имати истовремено и паран и непаран пут, иначе би они заједно формирали циклус непарне дужине. □

5.4. Ојлеров и Хамилтонов циклус

Дефиниција 5.7. Пут или циклус у графу је:

- *Ојлеров* ако пролази кроз сваку грану графа тачно једном;
- *Хамилтонов*[2] ако пролази кроз свако његово теме тачно једном.

Граф зовемо Ојлеровим, односно Хамилтоновим, ако у њему постоји Ојлеров, односно Хамилтонов циклус.

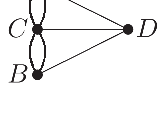
Тврђење 5.8. Граф G је Ојлеров ако и само ако је повезан и сва темена имају паран степен.

У графу G постоји Ојлеров пут ако и само ако је повезан и највише два темена имају непаран степен.

Доказ. Ако је граф Ојлеров, онда сваки пролазак Ојлеровим циклусом кроз теме v користи две гране из v, одакле следи да је број ивица у v паран.

Нека је свако теме у G парног степена и нека је v произвољно теме. У G постоји циклус; нека је C најдужи. Ако циклус C није Ојлеров, брисањем његових грана из графа G добијамо непразан граф G' у коме свако теме има паран степен. Због повезаности графа G, граф G' и циклус C имају заједничко теме. Следи да у графу G' постоји циклус који има заједничко теме са C. Спајањем овог циклуса са циклусом C добијамо дужи циклус, противно претпоставци. Дакле, C је Ојлеров циклус. □

Пример 5.6. Вратимо се Кенигсбершким мостовима. Граф који они чине има четири темена A, B, C и D, сва непарног степена (редом $3,3,5,3$). По претходном тврђењу, у оваквом графу не може постојати Ојлеров пут. Према томе, задатак није могуће извршити.



[2] William Rowan Hamilton (1805-1865), ирски математичар

Док за Ојлерове графове постоји једноставан критеријум, са Хамилтоновим је ситуација сложенија. Критеријум за Хамилтонове графове није познат, и ако постоји, не може да зависи само од степена темена графа. Познати су само неки потребни и неки довољни услови да граф буде Хамилтонов.

Следи један једноставан потребан услов.

Тврђење 5.9. Ако је граф G Хамилтонов, онда за сваки непразан подскуп S његових темена, број компонената повезаности графа $G - S$ (добијеног брисањем темена скупа S из графа G) није већи од $|S|$.

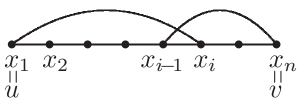
Доказ. Нека је C Хамилтонов циклус графа. Брисањем темена из S, циклус C (који садржи сва темена графа) се распада на највише $|S|$ компонената повезаности. □

Један довољан услов за хамилтоновост графа који узима у обзир само степене темена даје наредно тврђење.

Тврђење 5.10 (Оре[3], 1960). Претпоставимо да у простом графу са n темена важи $d(u) + d(v) \geqslant n$ кад год су u и v несуседна темена. Тада је тај граф Хамилтонов.

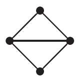
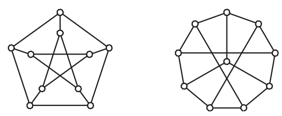
Доказ. За почетак ћемо додавати једну по једну недостајућу грану све док први пут не добијемо Хамилтонов граф. Дакле, у неком тренутку имамо граф G који није Хамилтонов, али ће додавањем гране uv постати Хамилтонов.

У графу $G + uv$ постоји Хамилтонов циклус. Уклањањем гране uv изгубићемо тај циклус, али остаће нам бар Хамилтонов пут у графу G. Нека је то пут $x_1x_2 \dots x_n$, где су $x_1 = u$ и $x_n = v$.



Ако је x_i $(2 \leqslant i < n)$ један од суседа темена u у графу G, онда x_{i-1} не може бити сусед темена v - иначе би граф G имао Хамилтонов циклус $x_1x_ix_{i+1} \dots x_nx_{i-1}x_{i-2} \dots x_1$. Дакле, ако је $d(u) = k$, имаћемо бар k темена која *нису* суседи темена v, па је $d(v) \leqslant n - 1 - k$. Али тада је $d(u) + d(v) \leqslant n - 1$, што је противно претпоставци. □

5.5. Задаци

1. Знате ли шта је то октаедар? Нацртати граф чија су темена темена октаедра, а гране његове ивице, али тако да се никоје две гране графа не секу. Колико темена и грана има тај граф?
2. Нацртати граф чија темена одговарају ивицама коцке. У овом графу два темена биће повезана граном ако и само ако одговарајуће ивице коцке имају заједничку тачку.
3. Одредити карактеристични полином графа на слици. 
4. Нацртати бар један прост граф чија сва темена имају степен 3, а коме је граф на слици из претходног задатка индукован подграф.
5. Слика приказује (наводно) два представљања истог графа, познатог као *Петерсенов*[4]. Наћи бар један изоморфизам између ова два представљања. 
6. Који је дијаметар Петерсеновог графа (оног лево и оног десно)? А радијус?
7. Постоји ли граф коме су и дијаметар и радијус једнаки 10?
8. Како одредити дијаметар датог графа? Смислити алгоритам! Који је ред величине сложености (тј. броја потребних операција) вашег алгоритма?
9. У простом графу са 7 темена, шест темена имају степене 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Колики може бити степен седмог темена? Наћи све могућности.
10. Ако граф има n темена и $m < n$ грана, доказати да он има бар $n - m$ компонената.
11. Да ли у Петерсеновом графу постоји Хамилтонов циклус? А Ојлеров?

[3]Øystein Ore (1899-1968), норвешки математичар
[4]Julius Petersen (1839-1910), дански математичар

12. Бубашваба шета ивицама октаедра, са почетком у темену A. Може ли се догодити да бубашваба прође сваку ивицу тачно једном и заврши у темену различитом од A?

13. Свако теме простог графа има степен бар d. Доказати да у овом графу мора да постоји циклус дужине бар $d+1$.

14. Сваки од 102 ученика неке школе познаје бар 68 других. Доказати да постоје четири ученика са једнаким бројем познаника у школи.

15. Колико највише поља шаховске табле 8×8 је могуће расећи дуж обе дијагонале тако да се табла не распадне?

5.6. Решења (али за сад само нека)

3. Одговор је $P(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$.

6. И дијаметар и радијус су једнаки 2. Заиста, од сваког темена до сваког другог може се стићи путем дужине 2. Дакле, ни радијус није већи од 2. С друге стране, радијус није 1, јер се ни из једног темена не може стићи до сваког другог путем дужине $\leqslant 1$.

7. Постоји, на пример обичан циклус дужине 21.

10. Ако дати граф има k компонената, онда се додавањем $k-1$ грана он може повезати. Међутим, повезан граф са n темена има бар $n-1$ грана. Следи да је полазни граф имао бар $n-1-(k-1) = n-k$ грана, одакле је $m \geqslant n-k$, тј. $k \geqslant n-m$.

11. Хамилтонов циклус постоји. Ојлеров не постоји (по тврђењу 5.8), јер свих 10 темена имају непаран степен.

12. Претпоставимо да бубашваба заврши своју шетњу у темену $B \neq A$. Дакле, ако графу октаедра додамо још једну грану BA и пошаљемо бубашвабу низ њу, она ће направити Ојлеров циклус. Међутим, у овако добијеном графу темена A и B имају степен 5, што је по тврђењу 5.8 немогуће.

13. Нека је $v_1v_2\dots v_k$ најдужи прост пут у графу. Због максималности пута, свих d (или више) суседа темена v_1 су на овом путу, а бар један од њих је међу теменима $v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_k$. Нека је то v_i $(i \geqslant d+1)$. Тада је $v_1v_2\dots v_iv_1$ циклус дужине бар $d+1$.

14. Претпоставимо супротно. Тада за свако k $(68 \leqslant k \leqslant 101)$ мора да постоји тачно троје ученика са по k познаника. Међутим, тада је укупан број познанстава $\frac{1}{2}(3\cdot 68 + 3\cdot 69 + \cdots + 3\cdot 101)$, што није цео број.