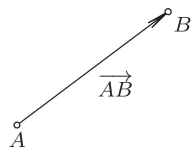
Рада Мутавџић Ђукић

1 Вектори - теорија

1.1 Геометријски вектори

Геометријски вектор или само *вектор* је одређен интензитетом (дужином) и смером.

Вектор се означава стрелицом (усмереном дужи) која повезује почетну тачку A са крајњом тачком B и означава са $\overrightarrow{AB}$.



У физици, векторске величине су рецимо брзина и сила, а скаларне маса и температура.

Нула вектор ($\vec{0}$) је вектор интензитета нула, а јединични вектор је вектор интензитета један. За произвољан вектор $\vec{v}$ интензитета $\|\vec{v}\|$, јединични вектор у смеру вектора $\vec{v}$ је вектор $\vec{v}/\|\vec{v}\|$. Супротан вектор $-\vec{v}$ вектора $\vec{v}$ има исти интензитет и правац као вектор $\vec{v}$, а супротан смер.

Векторе можемо сабирати (надовезивати) и множити константом.

1.1.1 Линеарна независност вектора

Нека су $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ дати вектори у простору $\mathbb{R}^3$, а α_1, α_2 и α_3 реални бројеви. Тада се израз $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$ назива *линеарна комбинација* вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$.

Дефиниција 1.1. Ако из једнакости $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ следи да је $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, кажемо да су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ *линеарно независни*. У супротом су ови вектори *линеарно зависни*.

Аналогно се дефинише линеарна зависност вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (изабере се $\vec{v}_3 = \vec{0}$).

Другим речима, три ненула вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ су линеарно зависна ако и само ако су компланарна (припадају истој равни). Тада се један вектор може изразити преко друга два, тј. постоје ненула бројеви c_1 и c_2 такви да је $\vec{v}_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.

Слично, два ненула вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ су линеарно зависна ако и само ако су колинеарна (имају исти правац). Тада постоји ненула број c такав да је $\vec{v}_2 = c\vec{v}_1$.

1.1.2 Векторска алгебра

Дефиниција 1.2. *Скаларни производ вектора* $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ је

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Из претходне дефиниције добијамо формулу за угао између вектора

$$\cos\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|},$$

као и формулу за дужину вектора:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_1|^2 \Rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}.$$

Специјално, ако је $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, важи

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \quad \text{(услов ортогоналности)}.$$

Пример 1.1. Ако је $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, наћи угао α између вектора $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$ и $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

Тражени угао добијамо из формуле $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

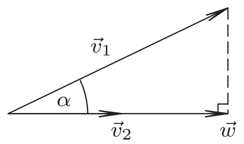
Налазимо

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 2|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - |\vec{v}|^2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 2 \\
|\vec{a}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\
|\vec{b}|^2 &= (2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 4|\vec{u}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 21.
\end{aligned}$$

Овде смо користили да је $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. Дакле,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{21}} = \frac{2}{3\sqrt{7}}, \quad \text{па је} \quad \alpha = \arccos\frac{2}{3\sqrt{7}}.$$

Посматрајмо сада пројекцију $\vec{w} = Pr_{\vec{v}_2}\vec{v}_1$ вектора $\vec{v}_1$ на вектор $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$. Ако је $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, важи $|\vec{w}| = |\vec{v}_1| \cos\alpha$.



Дакле,

$$\vec{w} = |\vec{w}| \cdot \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = |\vec{v}_1| \cos\alpha \cdot \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} \cdot \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2.$$

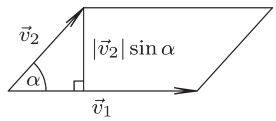
Тиме је доказана наредна теорема.

Теорема 1.1. Нека су $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ дати вектори. Пројекција вектора $\vec{v}_1$ на вектор $\vec{v}_2$ је

$$Pr_{\vec{v}_2}\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2.$$

Дефиниција 1.3. *Векторски производ вектора* $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ је вектор нормалан на векторе $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, дужине $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, орјентисан тако да је посматрано са његовог врха $\vec{v}_2$ лево од $\vec{v}_1$.

Интензитет векторског производа $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ једнак је површини паралелограма који они разапињу. Заиста, дужина једне стране паралелограма је $|\vec{v}_1|$, а дужина одговарајуће висине $|\vec{v}_2| \sin\alpha$.



Важи да је $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ ако и само ако су вектори $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ колинеарни.

Приметимо да је $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$, па векторско множење вектора није комутативно.

Дефиниција 1.4. *Мешовити производ вектора* $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ је

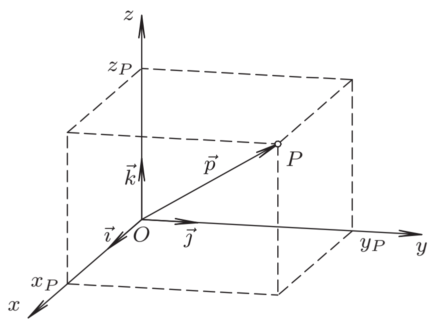
$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3.$$

Његова апсолутна вредност се не мења пермутовањем вектора и једнака је запремини паралелепипеда разапетог овим векторима.

Важи да је $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = 0$ ако и само ако су ови вектори компланарни.

1.2 Вектори у координатама

Нека је $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P)$ вектор положаја тачке $P(x_P, y_P, z_P)$ у Декартовом координатном систему $Oxyz$. Сваки вектор $\vec{v}$ је вектор положаја јединствене тачке P. Нпр. нула вектор је вектор положаја координатног почетка. *Координатни вектори* $\vec{\imath}=(1,0,0)$, $\vec{\jmath}=(0,1,0)$ и $\vec{k}=(0,0,1)$ су јединични вектори у позитивном смеру x, y и z-осе. Сваки вектор $\vec{v}$ се може изразити преко координатних вектора: ако је $\vec{v} = (x_P, y_P, z_P)$ произвољан вектор, тада је $\vec{v} = x_P\vec{\imath} + y_P\vec{\jmath} + z_P\vec{k}$.



За дате векторе $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ важи:

(i) $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ ако и само ако је $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$;

(ii) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

(iii) $c\vec{v}_1 = (cx_1, cx_2, cx_3)$, где је c произвољна константа.

1.2.1 База векторског простора

Скуп вектора $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ из $\mathbb{R}^3$ чини базу простора $\mathbb{R}^3$ ако се сваки вектор из $\mathbb{R}^3$ може на јединствен начин представити као линеарна комбинација вектора из B. Еквивалентно, скуп B је база векторског простора $\mathbb{R}^3$ ако су елементи скупа B линеарно независни и ако је сваки елемент простора $\mathbb{R}^3$ линеарна комбинација вектора из B.

На пример, скуп координатних вектора $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$. Тада се сваки вектор $\vec{v}$ из $\mathbb{R}^3$ може на јединствен начин представити као линеарна комбинација вектора базе, $\vec{v} = \alpha_1\vec{\imath} + \alpha_2\vec{\jmath} + \alpha_3\vec{k}$ - $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ су координате вектора $\vec{v}$ у тој бази. Приметимо да је број вектора базе једнак димензији простора.

1.2.2 Векторска алгебра (у координатама)

На основу Питагорине теореме, једноставно долазимо до формула за дужину вектора и растојање између две тачке.

Теорема 1.2. Дужина (интензитет) векора $\vec{v}=(x,y,z)$ је $|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Теорема 1.3. Растојање између тачака $P_1(x_1,y_1,z_1)$ и $P_2(x_2,y_2,z_2)$ је

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Пример 1.2. Наћи јединични вектор (дужине 1) у смеру од тачке $P_1(1,-3,4)$ до тачке $P_2(3,1,5)$.

Вектор $\overrightarrow{P_1P_2}=(3,1,5)-(1,-3,4)=(2,4,1)$ је дужине $\sqrt{21}$, па је тражени вектор $\frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,1)$.

За векторе у координатама такође се може увести скаларни, векторски и мешовити производ. На пример, ако су $\vec{v}_1=x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k}$ и $\vec{v}_2=x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k}$ дати вектори, тада је

$$\begin{aligned}\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2&=(x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k})\\&=x_1x_2\,\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+y_1y_2\,\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+z_1z_2\,\vec{k}\cdot\vec{k}+(x_1y_2+y_1x_2)\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+(y_1z_2+z_1y_2)\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+(x_1z_2+z_1x_2)\vec{k}\cdot\vec{\imath}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\end{aligned}$$

јер је $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\imath}=0$ и $|\vec{\imath}|=|\vec{\jmath}|=|\vec{k}|=1$ (координатни вектори $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ су јединични и ортогонални међу собом). Слично се могу извести одговарајући идентитети за векторски и мешовоти производ. То нам даје наредну теорему.

Теорема 1.4. Нека су дати вектори $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{v}_3=(x_3,y_3,z_3)$. За скаларни и векторски производ вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и мешовити производ вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ редом важи

(i) $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

(ii) $\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1)$;

(iii) $[\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]=(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$.

На основу дела (i) претходне теореме и дефиниције скаларног производа следи да за угао α између вектора $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ важи

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Пример 1.3. Дати су вектори $\vec{a}=(1,2,3)$ и $\vec{b}=(-1,0,1)$. Наћи $\vec{a}\times\vec{b}$ и $Pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

Рачунамо

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&2&3\\-1&0&1\end{vmatrix}=(2,-4,2),\qquad Pr_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{2}{2}(-1,0,1)=(-1,0,1).$$

Као последицу делова (ii) и (iii) претходног тврђења и геометријских особина векторског и мешовитог производа, имамо наредно тврђење.

Теорема 1.5. Нека су дати вектори $\vec{v}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}_2=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{v}_3=(x_3,y_3,z_3)$.

(i) Површина паралелограма одређеног векторима $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ је

$$P=\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2};$$

(ii) Запремина паралелепипеда одређеног векторима $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ је

$$V=|\Delta|,\quad \Delta=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

Пример 1.4. Наћи запремину тетраедра чија су темена дате тачке $P(-1,2,0)$, $Q(2,1,-3)$, $R(1,0,1)$ и $S(3,-2,3)$.

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}]|=\frac{1}{6}|[(3,-1,-3),(2,-2,1),(4,-4,3)]|=\frac{2}{3}.$$