3 Системи линеарних једначина - теорија

Посматрајмо систем од m линеарних једначина са n непознатих $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

или, у матричном облику

$$AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где је A *матрица система*, B *колона слободних чланова* и X *колона непознатих.*

Решење овог система је уређена n-торка бројева $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чијом заменом у полазни систем једначине система постају тачне једнакости. Кажемо да је систем:

(1) *сагласан* (решив), ако има бар једно решење;

(1а) *одређен*, ако има јединствено решење;

(1б) *неодређен*, ако има бесконачно много решења;

(2) *несагласан* (нерешив), ако нема решења.

Ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, систем зовемо *хомогеним* и такав систем увек има (тривијално) решење $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Поред матрице система A, посматра се још и *проширена матрица система*:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

3.1 Решавање система једначина матричном методом

Ако квадратни систем линеарних једначина запишемо у облику матричне једначине $AX = B$, тада је у случају да је $\det A \neq 0$ решење система једначина $X = A^{-1}B$.

Пример 3.1. Матричном методом решити систем једначина $\begin{aligned} x - y + 2z &= 8 \\ -2x + y + z &= -5 \\ 4x - y - 3z &= 7. \end{aligned}$

Напишимо полазни систем у облику матричне једначине $AX = B$. Тада је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице A је $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, па је $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.2 Гаусов метод елиминације

Гаусов метод елиминације се састоји у примени трансформација које не мењају решење система (преводе га у еквивалентан систем) да би елиминисали једну по једну промењљиву из система. Трансформације које не мењају решење система су:

(1) замена места две једначине система;

(2) множење једне једначине система ненула бројем;

(3) множење једне једначине система неким бројем и додавање некој другој једначини система.

Применом наведених трансформација произвољан систем се може свести на неки систем у канонском облику. тј. систем код кога је проширена матрица горња квази-троугаона:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Овакав систем ће имати решење ако и само ако је $\beta_{r+1} \neq 0$ (иначе ће постојати једначина облика $0 = 1$). У том случају промењљиве x_i налазимо „враћањем уназад”, тако што прво изразимо промењљиву из последње једначине, затим ту вредност убацимо у претпоследњу итд.

Пример 3.2. Решити систем једначина $\begin{aligned} x - y + 2z &= \ \ 8 \\ -2x + y + \ \ z &= -5 \\ 4x - y - 3z &= \ \ 7 \end{aligned}$ Гаусовим методом.

Трансформације система ћемо пратити на проширеној матрици система (трансформације су само над врстама да се не би променило решење система). Означимо i-ту врсту матрице са V_i, замену места i-те и j-те врсте са $V_i \leftrightarrow V_j$, множење са k i-те врсте са kV_i и операцију додавања j-те врсте помножене са k i-тој врсти са $V_i + kV_j$. Рачунамо

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right] \overset{\substack{V_2+2V_1 \\ V_3-4V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11 \\ 0 & 3 & -11 & -25 \end{array}\right] \overset{V_3+3V_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8 \end{array}\right].$$

Из треће једначине добијамо да је $z = 2$. Ако то уврстимо у другу једначину добијамо $-y + 5 \cdot 2 = -11$, одакле је $y = -1$. Коначно, када добијене вредности за z и y уврстимо у прву једначину добијамо $x - (-1) + 2 \cdot 2 = 8$, одакле је $x = 3$. Дакле, решење система је $(x, y, z) = (3, -1, 2)$.

3.3 Кронекер-Капелијев став

У систему једначина (3.1) означимо са $r(A)$ ранг матрице система, са $r([A|B])$ ранг проширене матрице система и нека је n број непознатих. Критеријум за решивост система линеарних једначина нам даје наредно тврђење.

Теорема 3.1. (Кронекер-Капелијев став) Систем линеарних једначина је сагласан ако и само ако је $r(A) = r([A|B])$. Даље, ако је $r(A) = r([A|B]) = n$ систем има јединствено решење, а ако је $r(A) = r([A|B]) = k < n,\ k \in \mathbb{N}$, систем има бесконачно много решења ($n-k$ променљивих узима произвољне вредности, а остале променљиве се изражавају преко њих).

Пример 3.3. Испитати сагласност система једначина
$$\begin{aligned} x + m^2y &= -m - m^3 \\ x + m^3y &= -m^2 - m^3 \\ x + my &= -m^2 - m. \end{aligned}$$

Прво сводимо проширену матрицу система на горњу квази-троугаону:

$$\begin{bmatrix} 1 & m^2 & | & -m-m^3 \\ 1 & m^3 & | & -m^2-m^3 \\ 1 & m & | & -m^2-m \end{bmatrix} \overset{\substack{V_2-V_1 \\ V_3-V_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & m^2 & | & -m-m^3 \\ 0 & m^3-m^2 & | & m-m^2 \\ 0 & m-m^2 & | & m^3-m^2 \end{bmatrix} \overset{\substack{V_2\leftrightarrow V_3 \\ V_3+mV_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & m^2 & | & -m-m^3 \\ 0 & m-m^2 & | & m^3-m^2 \\ 0 & 0 & | & m(m-1)^2(m+1) \end{bmatrix}.$$

Последњи корак важи под условом да је $m \neq 0$. Разликујемо четири случаја.

(1) Ако је $m \neq 0$ и $m \neq \pm 1$ ранг матрице система је 2, а ранг проширене матрице система је 3, па систем нема решења.

(2) Ако је $m = 0$ проширена матрица система се своди на
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$
па је ранг матрице система 1 и једнак је рангу проширене матрице сеистема, па систем има решење. Како је тај број мањи од броја непознатих 2, систем има бесконачо много решења.

(3) Ако је $m = 1$ проширена матрица постаје
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$
па је одговор исти као у претходном случају.

(4) Ако је $m = -1$ проширена матрица је
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$
Видимо да се ранг матрице система поклапа са рангом проширене матрице система и да је у овом случају тај број једнак броју непознатих (2), па систем има јединствено решење.

3.4 Крамерово правило

Квадратне системе (код којих је број једначина једнак броју непознатих) можемо решати помоћу Крамеровог правила. Дакле, нека је дат систем једначина облика (3.1) при чему је $m = n$. Треба израчунати *детерминанту система*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и *детерминанте променљивих*

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Разликујемо три случаја.

(1) Ако је $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$.

(2) Ако је $\Delta = 0$ и бар једна од детерминанти $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ није нула, систем нема решења.

(3) Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$, систем или има бесконачно много решења или нема решења (помоћу Крамеровог правила не можемо добити прецизнији одговор). Тада систем решавамо Гаусовим методом елиминације.

Пример 3.4. Решити систем једначина
$$\begin{aligned} x + ay + z &= -2 \\ ax + y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 8. \end{aligned}$$

Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Нађимо потребне детерминанте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2), \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 9(a-2),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 6(a-2), \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -(a-2)(8a+7).$$

(1) Ако је $a \neq 1$ и $a \neq 2$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{9}{a-1}, \frac{6}{a-1}, \frac{8a+7}{1-a}\right)$.

(2) Ако је $a = 1$ систем нема решења.

(3) Ако је $a = 2$ систем решавамо Гаусовим методом елиминације:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 8 \end{array}\right] \overset{\substack{V_2-2V_1 \\ V_3-V_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & -6 & -2 & 10 \end{array}\right] \overset{V_3-2V_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Решење система је $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t),\ t \in \mathbb{R}$.