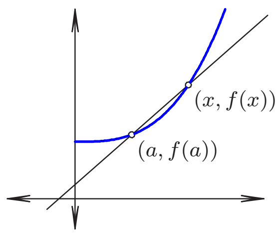
Рада Мутавџић Ђукић

6 Изводи

6.1 Први извод

За функцију $y = f(x)$ величина $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ представља *нагиб сечице* која пролази кроз тачке $(x, f(x))$ и $(a, f(a))$ графика функције f.

У граничном случају кад $x \to a$, лимес нагиба сечице $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ је $f'(a)$ и представља *нагиб тангенте* на криву f у тачки $(a, f(a))$.



Дефиниција 6.1. *Извод* функције f у тачки a, у ознаци $f'(a)$, је

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

ако овај лимес постоји.

Следи да су *једначине тангенте и нормале* на криву $y = f(x)$ у тачки $(a, f(a))$ редом

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{и} \quad y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\,(x-a)\,.$$

Пример 6.1. Одредити извод функције $f(x) = x^2$ по дефиниције, а затим једначине тангенте t и нормале n на криву $y = x^2$ у тачки $(-1, 1)$.

По дефиницији је

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a+h) = 2a.$$

Следи да је $f'(-1) = -2$, па је $t : y-1 = -2(x+1)$, тј. $t : y - 2x - 1$ и $n : y - 1 = \frac{1}{2}(x+1)$, тј. $n : y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

За извод функције $y = f(x)$ се често користе и друге ознаке:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Симболи D и d/dx представљају *операторе диференцирања*, где је *диференцирање* процес налажења извода.

Видмо да је

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где су $\Delta x = h$ и $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ промене по x- и y-координати. Дакле, dx можемо да тумачимо као „бесконачно малу” промену вредности x, а dy као одговарајућу бесконачно малу промену вредности y.

„Величине” dx и dy се зову *диференцијали* променљивих x и y. Символички записано, имамо

$$df = dy = f'(x)dx.$$

Пример 6.2. Извод функције $f(x) = e^x$ по дефиницији је

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Дакле, $f' = f$.

(Први) Диференцијал функције је $df = e^x dx$.

6.2 Диференцијабилност

Дефиниција 6.2. Функција f је *диференцијабилна* у тачки a ако $f'(a)$ постоји.

Она је диференцијабилна на (можда и бесконачном) отвореном интервалу (a,b) ако је диференцијабилна у свакој његовој тачки.

Теорема 6.1. Ако је функција f диференцијабилна у тачки a, онда је она и непрекидна у тој тачки.

Доказ. Како је $f(x)$ диференцијабилна у тачки a, постоји $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, па је

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0,$$

тј. $f(x)\to f(a)$ када $x\to a$, што значи да је f непрекидна у a. $\square$

Обрнуто тврђење не важи, тј. ако је функција непрекидна у некој тачки, не мора у тој тачки бити и диференцијабилна.

Пример 6.3. Посматрајмо функцију $f(x)=|x|$. Раније смо показали да је она непрекидна на целом скупу $\mathbb{R}$. За $x>0$ је $f(x)=x$, па је $f'(x)=1$. За $x<0$ је $f(x)=-x$, па је $f'(x)=-1$. Остаје да се испита диференцијабилност у нули. Налажењем левог и десног извода у нули

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1 \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1,$$

видимо да они ниси једнаки, па $f'(0)$ не постоји.

Геометријско тумачење претходног примера је да у нули функција има „шпиц” - па се у нули не може дефинисати тангента, што значи да нема извода.

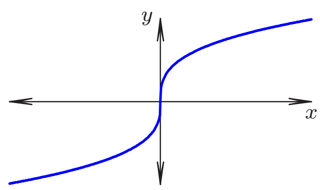
Још је могуће да је функција непрекидна у тачки a, а да у њој има вертикалну тангенту.

Пример 6.4. Функција $f(x)=\sqrt[3]{x}$ је непрекидна на целом скупу $\mathbb{R}$. Ипак,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

па функција f није диференцијабилна у тачки 0.

Како први извод представља коефицијент правца тангенте $\mathrm{tg}\alpha=\infty$, видимо да је угао који тангента заклапа са позитивним делом x-осе $\frac{\pi}{2}$, па је тангента права $x=0$.



У наставку су дати „таблични” изводи.

$*\ (c)'=0$	$*\ (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$*\ (e^x)'=e^x$	$*\ (a^x)'=a^x\ln a$
$*\ (\sin x)'=\cos x$	$*\ (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$*\ (\mathrm{tg}\ x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$*\ (\mathrm{arctg}\ x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$*\ (\cos x)'=-\sin x$	$*\ (\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$*\ (\mathrm{ctg}\ x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$*\ (\ \mathrm{arcctg}\, x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$
$*\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$*\ (\mathrm{sh}\, x)'=\mathrm{ch}\, x$	$*\ (\mathrm{ch}\, x)'=\mathrm{sh}\, x$	

6.3 Изводи вишег реда; правила диференцирања

Претпоставимо да је функција $y = f(x)$ диференцијабилна (на неком интервалу (a, b)), тј. да има коначан извод f' који је такође функција (на том интервалу). Ако је та функција диференцијабилна, можемо наћи *други извод* полазне функције који се означава на разне начине:

$$f'' = (f')' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dy^2}.$$

Настављањем овог поступка добијамо изводе вишег реда.

Дефиниција 6.3. Ако је n природан број, *n-ти извод* функције $y = f(x)$ дефинишемо индуктивно као извод $(n-1)$-вог извода:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}f^{(n-1)} = \frac{dy^n}{dx^n}.$$

Дефиниција 6.4. Величину $d^n f$ називамо *n-тим диференцијалом* функције f и с обзиром на дефиницију n-тог извода пишемо

$$d^n f = f^{(n)} dx^n.$$

Пример 6.5. Израчунати трећи извод и трећи дифернцијал функције $y = \ln x$.

Прва три извода функције су $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{2}{x^3}$, па је трећи дифернцијал $dy^3 = \frac{2}{x^3}dx^3$.

Теорема 6.2. Нека су f и g диференцијабилне функције и c константа. Важи

$$(cf)' = cf', \qquad (f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Докажимо правило за извод производа:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x+\Delta x) + f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Пример 6.6. Наћи извод функције $y = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

$$y' = (x+1)'e^{\frac{1}{x}} + (x+1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + (x+1)\,e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} - \frac{x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

Посматрајмо још сложену функцију $f(g(x))$. Нека је функција g диференцијабилна у тачки x и функција f диференцијабилна у тачки $g(x)$. Означимо

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g \quad \text{и} \quad f(g+\Delta g) = f(g) + \Delta f.$$

Тада је $\Delta g = (g'(x) + \varepsilon_1)\Delta x$ и $\Delta f = (f'(g(x)) + \varepsilon_2)\Delta g$, где $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$ када $\Delta x \to 0$, па важи

$$[f(g(x))]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(f'(g(x)) + \varepsilon_2)(g'(x) + \varepsilon_1) = f'(g(x))g'(x).$$

Теорема 6.3. Важи

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Пример 6.7. Наћи извод функције $y = x^x$.

Дата функција се може записати у облику $y = e^{x \ln x}$. Сада је по правилу за извод сложене функције $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, где је $(g(x))' = (x \ln x)' = \ln x + 1$, па је $y' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

6.4 Извод имплицитно и параметарски дате функције

До сада су функције биле дате у *експлицитном облику* $y = f(x)$. Ипак, функције могу бити дате и у *имплицитном облику* $F(x, y(x)) = 0$. Тада се извод функције $y(x)$ може добити диференцирањем дате једначине.

Пример 6.8. Израчунати извод функције y=$y(x)$ дате једначином $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$.

Диференцирајмо претходну једначину по x водећи рачуна да је $y = y(x)$:

$$2x \ln y + x^2 \frac{1}{y} y' - 2yy' \ln x - y^2 \frac{1}{x} = 0, \quad \text{па је} \quad y' = \frac{\frac{y^2}{x} - 2x \ln y}{\frac{x^2}{y} - 2y \ln x}.$$

Пример 6.9. Наћи нагиб тангенте у тачки $(2, -1)$ криве $2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$.

Диференцирањем дате једначине добијамо $2y' - 2x - 3y^2 y' = 0$, тј. $y' = \frac{2x}{2-3y^2}$. За $x = 2$ и $y = -1$ добијамо $y' = -4$, па је нагиб тангенте у датој тачки -4.

Нека је дата диференцијабилна функција $y = f(x)$ која је и бијекција. Тада постоји њена инверзна функција f^{-1} за коју важи $f^{-1}(f(x)) = x$. Диференцирањем ове једначине добијамо формулу за *извод инверзне функције*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1, \quad \text{тј.} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример 6.10. Извод функције $f(x) = \operatorname{arsh} x$ је према претходној формули

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{arsh} x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Крива још може бити дата и параметарски. На пример, параметарске једначине јединичне кружнице су $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Теорема 6.4. Нека је крива дата параметарским једначинама $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, при чему су функције $f_1(t)$ и $f_2(t)$ диференцијабилне за $\alpha < t < \beta$. Ако је је $f_1'(t) \neq 0$ важи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{f_1'(t)}{f_2'(t)}.$$

Доказ. На основу теореме о инверзној функцији постоји инверзна функција $(f_1^{-1})'(x) = 1/f_1'(t)$, па је $y = f_2(t) = f_2(f_1^{-1}(x))$ сложена функција чији је извод

$$\frac{dy}{dx} = f_2'(f_1^{-1}(x)) \cdot (f_1^{-1})'(x) = \frac{f_2'(t)}{f_1'(t)}.$$

□

Пример 6.11. Наћи извод параметарски дате криве $x = e^t \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$.

Овде је $x'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$ и $y'(t) = -e^{-t}(\sin t + \cos t)$, па је $\frac{dy}{dx} = -e^{-2t}$, при чему је $\sin t + \cos t \neq 0$, тј. $\operatorname{tg} t \neq -1$, тј. $t \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Други извод параметарски дате криве $x = x(t)$, $y = y(t)$ је

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$