Rešenje pismenog ispita iz Numeričkih metoda, I grupa

1. Koristeći Liebnizov kriterijum pokazati da je red

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{1+k^{6/5}},$$

konvergentan. Ispitati apsolutnu konvergenciju datog reda.

Rešenje. Opšti član reda je $a_k = k/(1+k^{6/5})$. Jednostavno nalazimo da važi

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$$

Takodje iz

$$\frac{d}{dk}a_k = \frac{5-k^{6/5}}{5(1+k^{6/5})^2} < 0, \quad k > 5,$$

zaključujemo da opšti član reda opada sa k. Na osnovu Liebnizovog kritirijuma zaključujemo da je alternativni red konvergentan.

Red

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{1+k^{6/5}},$$

nije konvergentan, jer je

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{k}{1+k^{6/5}}}{\frac{1}{k^{1/5}}} = 1,$$

a red

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{1/5}},$$

je divergentan. Zaključujemo da red nije apsolutno konvergentan.

2. Koristeći Gaussovu metodu eliminacije, sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Kako sistem treba rešiti sa izborom glavnog elementa, to na poziciju $(1,1)$ treba postaviti element prve kolone koji ima najveću apsolutnu vrednost. Kao što vidimo to je element u trećoj vrsti. Nalazimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 16 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 16 & 1 \\ 0 & -1.5 & -4 & .5 \\ 0 & -1.25 & -3 & .75 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 16 & 1 \\ 0 & -1.5 & -4 & .5 \\ 0 & -1.25 & -3 & .75 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 16 & 1 \\ 0 & -1.5 & -4 & .5 \\ 0 & 0 & .33333 & .33333 \end{array}\right]$$

Primetimo da prilikom eliminacije u drugoj koloni ne menjamo vrste jer je $|-1.5| > |-1.25|$.

Nalazimo

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1. \\
x_2 &= \frac{.5 + 4x_3}{-1.5} = -3. \\
x_1 &= \frac{1 - 9x_2 - 16x_3}{4} = 3.
\end{aligned}
$$

3. Naći Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.1	1.2	1.9	2.5
$f(x_k)$	2.0	1.8	1.4	1.8

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 2.0.

Rešenje. Formiramo tablicu podeljenih razlika na sledeći način

k	x_k	$[x_k; f]$	$[x_k, x_{k+1}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}; f]$	$[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}; f]$
0	1.1	$\underline{2.0}$			
			$\frac{1.8-2.0}{1.2-1.1} = \underline{-2.0}$		
1	1.2	1.8		$\frac{-.57143-(-2.0)}{1.9-1.1} = \underline{1.7857}$	
			$\frac{1.4-1.8}{1.9-1.2} = -.57143$		$\frac{.95238-1.7857}{2.5-1.1} = \underline{-.59523}$
2	1.9	1.4		$\frac{.66667-(-.57143)}{2.5-1.2} = .95238$	
			$\frac{1.8-1.4}{2.5-1.9} = .66667$		
3	2.5	1.8			

Odavde dobijamo

$$P_3(x) = 2.0 + (-2.0)(x-1.1) + 1.7857(x-1.1)(x-1.2) + (-.59523)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.9)$$

pa je

$$P_3(2.0) = 1.4428$$

4. Koristeći Newtonov metod odrediti pozitivno rešenje jednačine $x^3 = \sin x$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-5}.

Rešenje. Crtajući približno grafike funckija (vidi sliku 1) možemo oceniti da je rešenje malo manje od 1.

Newtonov metod je iterativni proces

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - \sin x_k}{3x_k^2 - \cos x_k}.$$

Startujući sa $x_0 = 1.$, dobijamo rezultate prezentovane u tabeli 1.

Vidimo da već treća iteracija sadrži rešenje sa zahtevanom tačnošću.

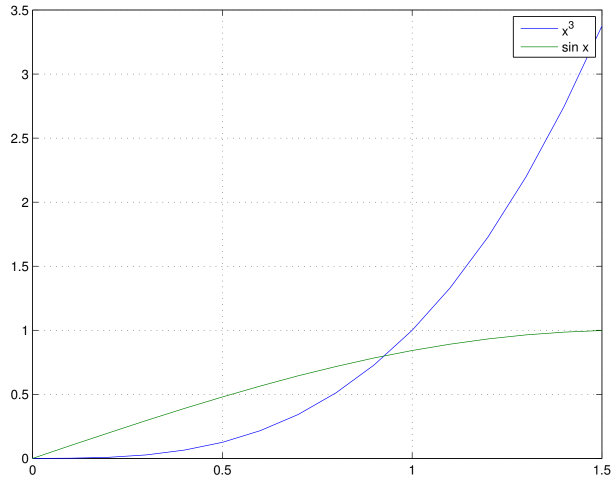

Figure 1: Grafici funckija $y = x^3$ i $y = \sin x$.

k	x_k
0	1.000000000000000
1	.935549390654669
2	.928701808803824
3	.928626317865638
4	.928626308731735
5	.928626308731734

Table 1: Iterativni proces $x_{k+1} = x_k - (x_k^3 - \sin x_k)/(3x_k^2 - \cos x_k)$, $k = 0, \ldots, 5$.

5. Koristeći uopštenu trapeznu formulu, sa barem pet podintervala, odrediti približno vrednost izraza

$$\int_{-1}^{1} e^{-x} dx.$$

Odrediti apsolutnu i relativnu grešku i uporediti sa teorijskom ocenom.

Rešenje. Kako je $H = (1 - (-1))/5 = .4$, formula sa pet podintervala je oblika

$$T_5(f) = .4 \cdot (.5 \cdot f(-1.) + f(-.6) + f(-.2) + f(.2) + f(.6) + .5 \cdot f(1.))\,.$$

Dobijamo

$$T_5 = .4 \cdot \left(.5 \cdot e^{1.} + e^{.6} + e^{.2} + e^{-.2} + e^{-.6} + .5 \cdot e^{-1.}\right) \approx 2.381657833015172$$

Vrednost integrala je

$$I = e^1 - e^{-1} \approx 2.350402387287603$$

Odavde dobijamo apsolutnu i relativnu grešku

$$\Delta = |I - T_5| \approx 0.031255445727569, \quad r = \frac{\Delta}{|I|} = 0.013297912687894$$

Teorijski greška je odredjena izrazom

$$|I - T_5| \le \frac{(1-(-1))^3}{12 \cdot 5^2} |e^{-x}| \le \frac{2}{75} e \approx .072487515425575, \quad x \in [-1, 1].$$

Stvarna vrednost apsolutne greške je otprilike dva puta manja.

Rešenja pismenog ispita iz Numeričkih metoda, II grupa

1. Koristeći Liebnizov kriterijum pokazati da je red

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k}{1+k^{5/4}},$$

konvergentan. Ispitati apsolutnu konvergenciju datog reda.

Rešenje. Opšti član reda je $a_k = k/(1+k^{5/4})$. Jednostavno nalazimo da važi

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0.$$

Takodje iz

$$\frac{d}{dk} a_k = \frac{4-k^{5/4}}{4(1+k^{5/4})^2} < 0, \quad k > 4,$$

zaključujemo da opšti član reda opada sa k. Na osnovu Liebnizovog kritirijuma zaključujemo da je alternativni red konvergentan.

Red

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{1+k^{5/4}},$$

nije konvergentan, jer je

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k}{1+k^{5/4}}}{\frac{1}{k^{1/4}}} = 1,$$

a red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/4}},$$

je divergentan. Zaključujemo da red nije apsolutno konvergentan.

2. Koristeći Gaussovu metodu eliminacije, sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Kako sistem treba rešiti sa izborom glavnog elementa, to na poziciju $(1,1)$ treba postaviti element prve kolone koji ima najveću apsolutnu vrednost. Kao što vidimo to je element u drugoj vrsti. Nalazimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & .2 & -.2 & -.6 \\ 0 & 4.8 & 7.2 & -2.4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4.8 & 7.2 & -2.4 \\ 0 & .2 & -.2 & -.6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4.8 & 7.2 & -2.4 \\ 0 & 0 & -.5 & -.5 \end{array}\right]$$

Primetimo da prilikom eliminacije u drugoj koloni menjamo vrste jer je $|4.8| > |.2|$.

Nalazimo

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1. \\
x_2 &= \frac{-2.4 - 7.2 \cdot x_3}{4.8} = -2. \\
x_1 &= \frac{8 - 4x_2 - 6x_3}{5} = 2.
\end{aligned}
$$

3. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.0	1.4	2.1	3.5
$f(x_k)$	2.0	1.8	1.5	1.8

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 2.3.

Rešenje. Nalazimo

$$
\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-1.4)(x-2.1)(x-3.5)}{(1.0-1.4)(1.0-2.1)(1.0-3.5)} = -.90909(x-1.4)(x-2.1)(x-3.5), \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-1.0)(x-2.1)(x-3.5)}{(1.4-1.0)(1.4-2.1)(1.4-3.5)} = 1.7007(x-1.0)(x-2.1)(x-3.5), \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-1.0)(x-1.4)(x-3.5)}{(2.1-1.0)(2.1-1.4)(2.1-3.5)} = -.92764(x-1.0)(x-1.4)(x-3.5), \\
\ell_3(x) &= \frac{(x-1.0)(x-1.4)(x-2.1)}{(3.5-1.0)(3.5-1.4)(3.5-2.1)} = .13605(x-1.0)(x-1.4)(x-2.1), \\
P_3(x) &= f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + f(x_2)\ell_2(x) + f(x_3)\ell_3(x) \\
&= 2.0\ell_0(x) + 1.8\ell_1(x) + 1.5\ell_2(x) + 1.8\ell_3(x), \\
P_3(2.3) &= 2.0\ell_0(2.3) + 1.8\ell_1(2.3) + 1.5\ell_2(2.3) + 1.8\ell_3(2.3) \approx 1.4485
\end{aligned}
$$

4. Koristeći Newtonov metod odrediti pozitivno rešenje jednačine $x^2 = \cos x$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-5}.

Rešenje. Crtajući približno grafike funckija (vidi sliku 2) možemo oceniti da je rešenje malo manje od 1.

Newtonov metod je iterativni proces

$$
x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - \cos x_k}{2x_k + \sin x_k}.
$$

Startujući sa $x_0 = 1.$, dobijamo rezultate prezentovane u tabeli 2.

Vidimo da već treća iteracija sadrži rešenje sa zahtevanom tačnošću.

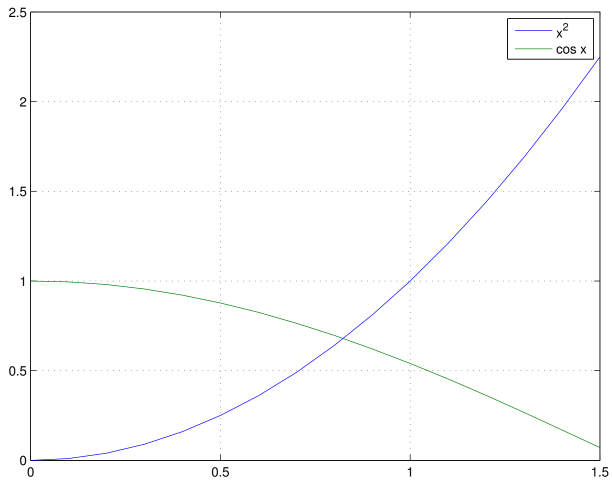

Figure 2: Grafici funckija $y = x^2$ i $y = \cos x$.

k	x_k
0	1.000000000000000
1	.838218409904707
2	.824241868225874
3	.824132319050929
4	.824132312302522
5	.824132312302522

Table 2: Iterativni proces $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - \cos x_k)/(2x_k + \sin x_k)$, $k = 0, \ldots, 5$.

5. Koristeći uopštenu formulu srednje tačke, sa barem pet podintervala, odrediti približno vrednost izraza

$$\int_{-1}^{1} e^x dx.$$

Odrediti apsolutnu i relativnu grešku i uporediti sa teorijskim ocenama.

Rešenje. Koristićemo formulu sa pet podintervala $N = 5$. Za $h = (1 - (-1))/N = .4$, formula ima oblik

$$M_5 = .4 \cdot (f(-.8) + f(-.4) + f(0) + f(.4) + f(.8)).$$

Dobijamo

$$M_5 \approx 2.334805854514639$$

Kako je

$$I = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1},$$

apsolutna i relativna greška su

$$\Delta = |M_5 - I| \approx .015596532772964, \quad r = \frac{\Delta}{|I|} \approx .006635686237097$$

Teorijska ocena apsolutne greške je

$$\Delta = \frac{(1-(-1))^3}{24 \cdot 5^2} |e^x| \leq \frac{1}{75} e \approx .036243757712787,$$

vidimo da je teorijska vrednst dva puta veća od stvarne vrednosti apsolutne greške.