Математика 3 - писмени део испита 11.9.2015.

Група 1 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = e^{3x}.$$

<u>Решење</u>. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0.$$

Решења карактеристичне једначине су $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2/3} = \pm i$, одакле добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = \cos x$ и $y_3 = \sin x$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо методом неодређених коефицијената. Како се њена десна страна може написати у облику

$$e^{3x} = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)\right]$$

за $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $P_m(x) = 1$, $Q_l(x) = 0$, и како $\alpha + \beta i = 3$ јесте решење карактеристичне једначине вишеструкости $s = 1$, то партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

где је $k = \max\{m, l\} = 0$. На основу претходног следи

$$y_p = Axe^{3x},$$

где је A непозната вредност коју треба одредити. Лако добијамо

$$y_p' = A(3x+1)e^{3x}, \quad y_p'' = 3A(3x+2)e^{3x}, \quad y_p''' = 27A(x+1)e^{3x},$$

а након уврштавања y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у полазну једначину добијамо

$$A = \frac{1}{10},$$

па је

$$y_p = \frac{1}{10} x e^{3x}.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_p,$$

односно

$$y = \left(c_1 + \frac{1}{10} x\right) e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

2. Одредити дивергенцију и ротор векторског поља

$$\vec{A} = (xy + z, xz - y, -y^2 - z^2)$$

у тачки $(0,0,0)$. Затим израчунати циркулацију датог векторског поља дуж криве L која се налази у пресеку површи $y^2 + z^2 = 1$ и равни $x = 3$.

Решење. Дивергенција датог поља у тачки $(0,0,0)$ је

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{A} &= \nabla \circ \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ \left(xy + z, xz - y, -y^2 - z^2\right) \\ &= y - 1 - 2z = \{(0,0,0)\} = -1, \end{aligned}$$

док је ротор датог поља у тачки $(0,0,0)$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy + z & xz - y & -y^2 - z^2 \end{vmatrix} = (-2y - x, 1, z - x)$$
$$= \{(0,0,0)\} = (0,1,0).$$

Циркулацију векторског поља $\vec{A}$ дуж криве L рачунамо као криволинијски интеграл друге врсте

$$C_L\left(\vec{A}\right) = \int_L (xy + z)dx + (xz - y)dy + (-y^2 - z^2)dz.$$

Крива L је кружница која се налази у пресеку цилиндра $y^2+z^2=1$ и равни $x=3$, а њена параметризација је

$$x=3,\ y=\cos t,\ z=\sin t;\quad 0\leq t<2\pi,$$

одакле следи

$$dx=0,\ dy=-\sin t dt,\ z=\cos t dt.$$

Даље је

$$\begin{aligned}
C_L\left(\vec{A}\right) &= \int_L (xy+z)dx+(xz-y)dy+(-y^2-z^2)dz \\
&= \int_0^{2\pi} (3\cos t+\sin t)\cdot 0+(3\sin t-\cos t)\cdot(-\sin t dt)-1\cdot\cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-3\sin^2 t+\sin t\cos t-\cos t)dt=\cdots=-3\pi.
\end{aligned}$$

3. Израчунати површину оног дела површи $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ који исеца површ $z=\sqrt{\dfrac{1}{2}+3(x^2+y^2)}$.

Решење. Површину површи коју конус $z=\sqrt{\dfrac{1}{2}+3(x^2+y^2)}$ исеца из сфере $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ рачунамо по формули

$$P=\iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

где z изражавамо из једначине сфере,

$$z=\pm\sqrt{\frac{9}{2}-x^2-y^2},$$

при чему узимамо позитиван предзнак, јер је дат "горњи"конус. Даље је

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{\frac{9}{2}-x^2-y^2}},$$

па након уврштавања извода у израз за површину и сређивања тог израза добијамо

$$P = 3 \iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{9-2(x^2+y^2)}}.$$

Из једначине конуса следи $z^2 = \dfrac{1}{2} + 3(x^2+y^2)$, па кад то уврстимо у једначину сфере добијамо кружницу $x^2+y^2=1$, која се налази у пресеку датих површи. Стога је

$$G: \; x^2+y^2 \le 1.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi$$

област G трансформишемо у област

$$D: \; \rho^2 \le 1.$$

Одговарајуће границе су $\rho|_0^1$, $\varphi|_0^{2\pi}$, а јакобијан је $J=\rho$. Даље имамо

$$P = 3 \iint\limits_D \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{9-2\rho^2}} = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{9-2\rho^2}} = \cdots = 3\pi(3-\sqrt{7}).$$

4. Применом формуле Гаус-Остроградског израчунати

$$\iint\limits_\Gamma xdydz + y^3dzdx + 3x^2zdxdy,$$

где је Γ површ омеђена са $z = \dfrac{2}{3} + x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$, $x=0$, $y=0$, која се налази у првом октанту.
<u>Решење</u>. Важи

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_\Gamma xdydz + y^3dzdx + 3x^2zdxdy = \left\{ \begin{array}{c} \text{формула} \\ \text{Гаус-Остроградског} \end{array} \right\} \\
&= \iiint\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y^3 + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2z)\right] dxdydz \\
&= \iiint\limits_T (1+3y^2+3x^2)dxdydz,
\end{aligned}$$

где је T тело омеђено површи Γ, прецизније, омеђено параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$ "одозго"и параболоидом $z = \frac{2}{3} + x^2 + y^2$ "одоздо". Зато је

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_G \left[1 + 3(x^2 + y^2)\right] dxdy \int_{\frac{2}{3}+x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dz \\
&= \iint\limits_G \left[1 + 3(x^2 + y^2)\right] [z]\Big|_{\frac{2}{3}+x^2+y^2}^{1-x^2-y^2} dxdy \\
&= \iint\limits_G \left[\frac{1}{3} - (x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2)^2\right] dxdy,
\end{aligned}$$

где је G пројекција тела T на O_{xy}-раван. Та пројекција је унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека датих параболоида. Након изједначавања десних страна једначина датих параболоида и сређивања израза добијамо $x^2 + y^2 = \frac{1}{6}$. Узевши у обзир да радимо у првом октанту, имамо

$$G: \ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{6}, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D: \ \rho^2 \leq 1, \ \rho\cos\varphi \geq 0, \ \rho\sin\varphi \geq 0,$$

при чему добијамо границе $\rho|_0^{1/\sqrt{6}}$, $\varphi|_0^{\pi/2}$, а јакобијан је $J = \rho$. Даље је

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \left(\frac{1}{3} - \rho^2 - 6\rho^4\right) \cdot \rho d\varphi d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^{1/\sqrt{6}} \left(\frac{1}{3}\rho - \rho^3 - 6\rho^5\right) d\rho \\
&= \cdots = \frac{7\pi}{864}.
\end{aligned}$$

Математика 3 - писмени део испита   11.9.2015.

Група 2 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = e^{-2x}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 1. задатку групе 1. Добија се опште решење

$$y = \left(c_1 + \frac{1}{5}x\right) e^{-2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

2. Одредити дивергенцију и ротор векторског поља

$$\vec{A} = (yz + x, xy - z, -x^2 - z^2)$$

у тачки $(0, 0, 0)$. Затим израчунати циркулацију датог векторског поља дуж криве L која се налази у пресеку површи $x^2 + z^2 = 1$ и равни $y = 3$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1, с тим што промењливе замене улоге: $(x, y, z) \to (y, z, x)$. Добија се

$$\mathrm{div}\vec{A} = 1, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = (1, 0, 0), \quad C_L\left(\vec{A}\right) = -3\pi.$$

3. Израчунати површину оног дела површи $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{10}{3}$ који исеца површ $z = \sqrt{\dfrac{1}{3} + 2(x^2 + y^2)}$.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1. Добија се

$$P = \frac{2\pi}{3}(10 - \sqrt{70}).$$

4. Применом формуле Гаус-Остроградског израчунати

$$\iint\limits_{\Gamma} x^3 dydz + ydzdx + 3y^2 zdxdy,$$

где је Γ површ омеђена са $z = \dfrac{1}{3} + x^2 + y^2$, $z = 1 - x^2 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$, која се налази у првом октанту.
Решење. Овај задатак се решава аналогно 4. задатку групе 1. Добија се

$$\iint_{\Gamma} x^3 dydz + ydzdx + 3y^2 zdxdy = \frac{\pi}{27}.$$