Оно што је евентуално остало недоречено на вежбама и предавањима - 2. део

Њутнова метода за нелинеарне системе једначина

Посматрајмо нелинеарни систем од n једначина са n не познатих

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,
\end{aligned}$$

који се може записати и као

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = 0,$$

где $\overrightarrow{f}$ представља вектор-функцију $[f_1\ f_2\ \ldots\ f_n]$ вектор-аргумента $\overrightarrow{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$. Итеративни алгоритам за решавање оваквог система гласи

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \end{bmatrix},$$

где се вредности одговарајућих парцијалних извода такође, као и вредности самих функција на десној страни, рачунају у вредностима аргумената добијеним у $k-$тој итерацији - $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$. Последње се скраћено може записати у облику

$$\left[\overrightarrow{x^{(k+1)}}\right]^T = \left[\overrightarrow{x^{(k)}}\right]^T - \left(W\left(\overrightarrow{x^{(k)}}\right)\right)^{-1} \cdot \left[\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x^{(k)}}\right)\right]^T,$$

где је

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

тзв. матрица Вронског (њена детерминанта се зове Вронскијан). Наведени алгоритам конвергира уколико почетну итерацију $\left[x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ \ldots\ x_n^{(0)}\right]$ изаберемо довољно блиском правом решењу система. Ми то решење не знамо, али треба да се трудимо да вредности датих функција у почетној итерацији буду што ближе нули, као и да детерминанта матрице W (Вронскијан) буде различита од 0 (како бисмо могли да је инвертујемо).

Подсетимо се да је за дату матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где је K_{ij} (кофактор) детерминанта матрице која остане кад из матрице A уклонимо i-ту врсту и $j-$ту колону **помножена са** $(-1)^{(i+j)}$. НЕ ГУБИТИ ИЗ ВИДА ЧИЊЕНИЦУ ДА СЕ У ПОСЛЕДЊЕМ КОРАКУ НА ПОЗИЦИЈУ (ij) НЕ СТАВЉА K_{ij} НЕГО K_{ji}!!!

Пример 1. Користећи Њутнову методу за нелинеарне системе једначиина, са тачношћу 10^{-4} решити систем

$$y(x-1) = 1$$
$$x^2 = y^2 + 1.$$

Решење: Ради се о систему $f_1(x_1, x_2) = 0,\ f_2(x_1, x_2) = 0$, где је

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 x_1 - x_2 - 1 \text{ и } f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1,$$

па је

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2x_2^2 - 2x_1^2 + 2x_1} \begin{bmatrix} -2x_2 & -x_1 + 1 \\ -2x_1 & x_2 \end{bmatrix},$$

док одговарајући итеративни алгоритам гласи

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} -2x_2^{(k)} & -x_1^{(k)} + 1 \\ -2x_1^{(k)} & x_2^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2^{(k)} x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 1 \\ \left(x_1^{(k)}\right)^2 - \left(x_2^{(k)}\right)^2 - 1 \end{bmatrix},$$

где је $D_k = -2\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 2\left(x_1^{(k)}\right)^2 + 2x_1^{(k)}$ (нема места да све стане у једном реду).

Записано без матрица, овај итеративни процес гласи

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{\left(-2x_2^{(k)}\right)\cdot\left(x_2^{(k)}x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 1\right) + \left(-x_1^{(k)}+1\right)\cdot\left(\left(x_1^{(k)}\right)^2 - \left(x_2^{(k)}\right)^2 - 1\right)}{-2\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 2\left(x_1^{(k)}\right)^2 + 2x_1^{(k)}} \\
x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{\left(-2x_1^{(k)}\right)\cdot\left(x_2^{(k)}x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 1\right) + x_2^{(k)}\cdot\left(\left(x_1^{(k)}\right)^2 - \left(x_2^{(k)}\right)^2 - 1\right)}{-2\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 2\left(x_1^{(k)}\right)^2 + 2x_1^{(k)}}
\end{aligned}
$$

На часу смо скицирањем графика функција $y = \dfrac{1}{x-1}$ и $x^2 - y^2 = 1$ (уствари, две хиперболе) лоцирали да се њихове пресечне тачке налазе у близини тачака $A(1.7, 1.5)$ и $B(-1, -0.5)$. У првом случају добијамо

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.7, & y_0 &= 1.5 \\
x_1 &= 1.7148, & y_1 &= 1.3968 \\
x_2 &= 1.7167, & y_2 &= 1.3953 \\
x_3 &= 1.7167, & y_3 &= 1.3953,
\end{aligned}
$$

а у другом

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -1, & y_0 &= -0.5 \\
x_1 &= -1.1111, & y_1 &= -0.4722 \\
x_2 &= -1.1069, & y_2 &= -0.4746 \\
x_3 &= -1.1069, & y_3 &= -0.4746.
\end{aligned}
$$

Пример 2. Решити систем једначина

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
2x^2 + y^2 &= 4z \\
3x^2 + z^2 &= 4y.
\end{aligned}
$$

узимајући за почетну итерацију $\left[x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ \ x_3^{(0)}\right] = [0.5\ 0.5\ 0.5]$

Решење. Имамо $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2$ (прво систем морамо преписати у одговарајућем облику из теоријског разматрања). Сада је

$$
W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 4x_1 & 2x_2 & -4 \\ 6x_1 & -4 & 2x_3 \end{bmatrix},
$$

одакле добијамо

$$
detW = -32x_1x_2x_3 - 32x_1 - 48x_1x_2 - 32x_1x_3
$$

и

$$W^{-1}=\frac{1}{-32x_1x_2x_3-32x_1-48x_1x_2-32x_1x_3}\begin{bmatrix} 4x_2x_3-16 & -4x_2x_3-8x_3 & -4x_2x_3-8x_2 \\ -8x_1x_3-24x_1 & -8x_1x_3 & 8x_1x_3+8x_1 \\ -12x_1x_2-16x_1 & 12x_1x_2+8x_1 & -4x_1x_2 \end{bmatrix}$$

У конкретном случају, одговарајући итеративни алгоритам гласи

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}-\left[W\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}\right)\right]^{-1}\cdot\begin{bmatrix} \left(x_1^{(k)}\right)^2+\left(x_2^{(k)}\right)^2+\left(x_3^{(k)}\right)^2-1 \\ 2\left(x_1^{(k)}\right)^2+\left(x_2^{(k)}\right)^2-4x_3^{(k)} \\ 3\left(x_1^{(k)}\right)^2-4x_2^{(k)}+\left(x_3^{(k)}\right)^2 \end{bmatrix}$$

где се под $\left[W\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}\right)\right]^{-1}$ подразумева

$$\frac{1}{-32x_1^{(k)}x_2^{(k)}x_3^{(k)}-32x_1^{(k)}-48x_1^{(k)}x_2^{(k)}-32x_1^{(k)}x_3^{(k)}}\begin{bmatrix} 4x_2^{(k)}x_3^{(k)}-16 & -4x_2^{(k)}x_3^{(k)}-8x_3^{(k)} & -4x_2^{(k)}x_3^{(k)}-8x_2^{(k)} \\ -8x_1^{(k)}x_3^{(k)}-24x_1^{(k)} & -8x_1^{(k)}x_3^{(k)} & 8x_1^{(k)}x_3^{(k)}+8x_1^{(k)} \\ -12x_1^{(k)}x_2^{(k)}-16x_1^{(k)} & 12x_1^{(k)}x_2^{(k)}+8x_1^{(k)} & -4x_1^{(k)}x_2^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Полазећи од $\left[x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ x_3^{(0)}\right]=[0.5\ 0.5\ 0.5]$, добијамо

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}-\frac{1}{-40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -0.2500 \\ -1.2500 \\ -1.0000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8750 \\ 0.5000 \\ 0.3750 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8750 \\ 0.5000 \\ 0.3750 \end{bmatrix}-\frac{1}{-52.75}\begin{bmatrix} -15.2500 & -3.7500 & -4.7500 \\ -23.6250 & -2.6250 & 9.6250 \\ -19.2500 & 12.2500 & -1.7500 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.1563 \\ 0.2813 \\ 0.4375 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7704 \\ 0.4959 \\ 0.3688 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix}=\ldots\begin{bmatrix} 0.7884 \\ 0.4968 \\ 0.3702 \end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix}=\ldots\begin{bmatrix} 0.7845 \\ 0.4966 \\ 0.3699 \end{bmatrix},$$

Александар Пејчев