Математика 3 - писмени део испита 25.9.2015.

Група 2 - решења

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y = x \sin x.$$

Решење. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y'' + y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Решења карактеристичне једначине су $\lambda_{1,2} = \pm i$, одакле добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо методом неодређених коефицијената. Како се њена десна страна може написати у облику

$$x \sin x = e^{\alpha x} \left[P_m(x) \cos(\beta x) + Q_l(x) \sin(\beta x) \right]$$

за $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_m(x) = 0$, $Q_l(x) = x$, и како $\alpha + \beta i = i$ јесте решење карактеристичне једначине вишеструкости $s = 1$, то партикуларно решење полазне нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = x^s e^{\alpha x} \left[R_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x) \right],$$

где је $k = \max\{m, l\} = 1$. На основу претходног следи

$$y_p = x \left[(Ax + B) \cos x + (CX + D) \sin x \right],$$

где су A, B, C и D непознате вредности које треба одредити. Лако добијамо

$$y_p' = \Big[Cx^2 + (2A + D)x + B \Big] \cos x + \Big[-Ax^2 + (-B + 2C)x + D \Big] \sin x,$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= \left[-Ax^2 + (-B+4C)x + 2A + 2D\right]\cos x \\ &\quad + \left[-Cx^2 + (-4A-D)x - 2B + 2C\right]\sin x, \end{aligned}$$

а након уврштавања y_p, y_p' и y_p'' у полазну једначину добијамо

$$A = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ C = 0, D = \frac{1}{4},$$

па је

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

Опште решење полазне једначине је

$$y = y_h + y_p,$$

односно

$$y = \left(c_1 - \frac{1}{4}x^2\right)\cos x + \left(c_2 + \frac{1}{4}x\right)\sin x.$$

2. Одредити дивергенцију, ротор и векторске линије векторског поља

$$\vec{A} = \mathrm{grad}(x\ln z, y, xz).$$

Решење. Важи

$$\vec{A} = \mathrm{grad}(x\ln z, y, xz) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\ln z), \frac{\partial}{\partial y}y, \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right) = (\ln z, 1, x).$$

Дивергенција датог поља је

$$\mathrm{div}\vec{A} \;=\; \nabla \circ \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (\ln z, 1, x) = 0.$$

док је ротор датог поља

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \ln z & 1 & x \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{z} - 1, 0\right).$$

Векторске линије поља $\vec{A}$ одређујемо из одговарајућег система диференцијалних једначина у симетричном облику

$$\frac{dx}{\ln z} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{x}.$$

Из једнакости

$$\frac{dx}{\ln z} = \frac{dz}{x}$$

имамо

$$xdx = \ln z dz,$$

одакле након интеграције добијамо

$$c_1 = \frac{x^2}{2} + z - z\ln z.$$

Одавде је

$$x = \pm\sqrt{2(c_1 - z + z\ln z)},$$

па кад то уврстимо у једнакост

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{x},$$

имамо

$$dy = \frac{dz}{\sqrt{2(c_1 - z + z\ln z)}},$$

па је

$$c_2 = y - \int \frac{dz}{\sqrt{2(c_1 - z + z\ln z)}} = \cdots .$$

3. Израчунати $\iint\limits_S ds$, где је S део површи $x = y^2 + z^2$ који исеца површ $y^2 + z^2 = 1$.

Решење. Дати површински интеграл прве врсте сводимо да двоструки интеграл:

$$I = \iint\limits_S ds = \iint\limits_G \sqrt{1 + p^2 + q^2} dydz,$$

где p и q добијамо из једначине параболоида $x = y^2 + z^2$,

$$p = \frac{\partial x}{\partial y} = 2y,\ q = \frac{\partial x}{\partial z} = 2z,$$

па је

$$I = \iint\limits_G \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} dydz.$$

Област G добијамо из пресека датог параболоида $x = y^2 + z^2$ и датог цилиндра $y^2 + z^2 = 1$, при чему закључујемо да важи

$$G:\ y^2 + z^2 \leq 1.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi$$

област G трансформишемо у област

$$D:\ \rho^2 \leq 1.$$

Одговарајуће границе су $\rho|_0^1$, $\varphi|_0^{2\pi}$, а јакобијан је $J = \rho$. Даље имамо

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \cdots = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

4. Израчунати запремину тела омеђеног са $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}z = 0$, $z = x$.
<u>Решење</u>. Запремину датог тела рачунамо на следећи начин:

$$V = \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int_{\frac{3}{2}(x^2+y^2)}^{x} dz = \iint\limits_G \left[x - \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\right] dxdy,$$

где је T тело омеђено омеђено параболоидом $z = \frac{3}{2}(x^2+y^2)$ "одоздо" и равни $z = x$ "одозго", а G је пројекција тела T на O_{xy}-раван. Та пројекција је унутрашњост (укључујући и границу) пројекције пресека датог параболоида и дате равни. Зато добијамо

$$G:\ x^2 + y^2 \leq \frac{2}{3}x.$$

Преласком на поларне координате

$$x = \rho \sin\varphi, \quad y = \rho \cos\varphi,$$

област G трансформишемо у област

$$D: \ \rho^2 \leq \frac{2}{3}\rho \sin\varphi,$$

односно

$$D: \ \rho \leq \frac{2}{3}\sin\varphi,$$

при чему добијамо границе $\rho|_0^{\frac{2}{3}\sin\varphi}$, $\varphi|_0^{\pi}$ (јер због позитивности ρ мора бити $\sin\varphi \geq 0$), а јакобијан је $J = \rho$. Даље је

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D \left(\rho\sin\varphi - \frac{3}{2}\rho^2\right) \cdot \rho d\varphi d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{2}{3}\sin\varphi} \left(\rho^2 \sin\varphi - \frac{3}{2}\rho^3\right) d\rho \\ &= \cdots = \frac{2}{81}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi d\varphi = \cdots = \frac{\pi}{108}. \end{aligned}$$