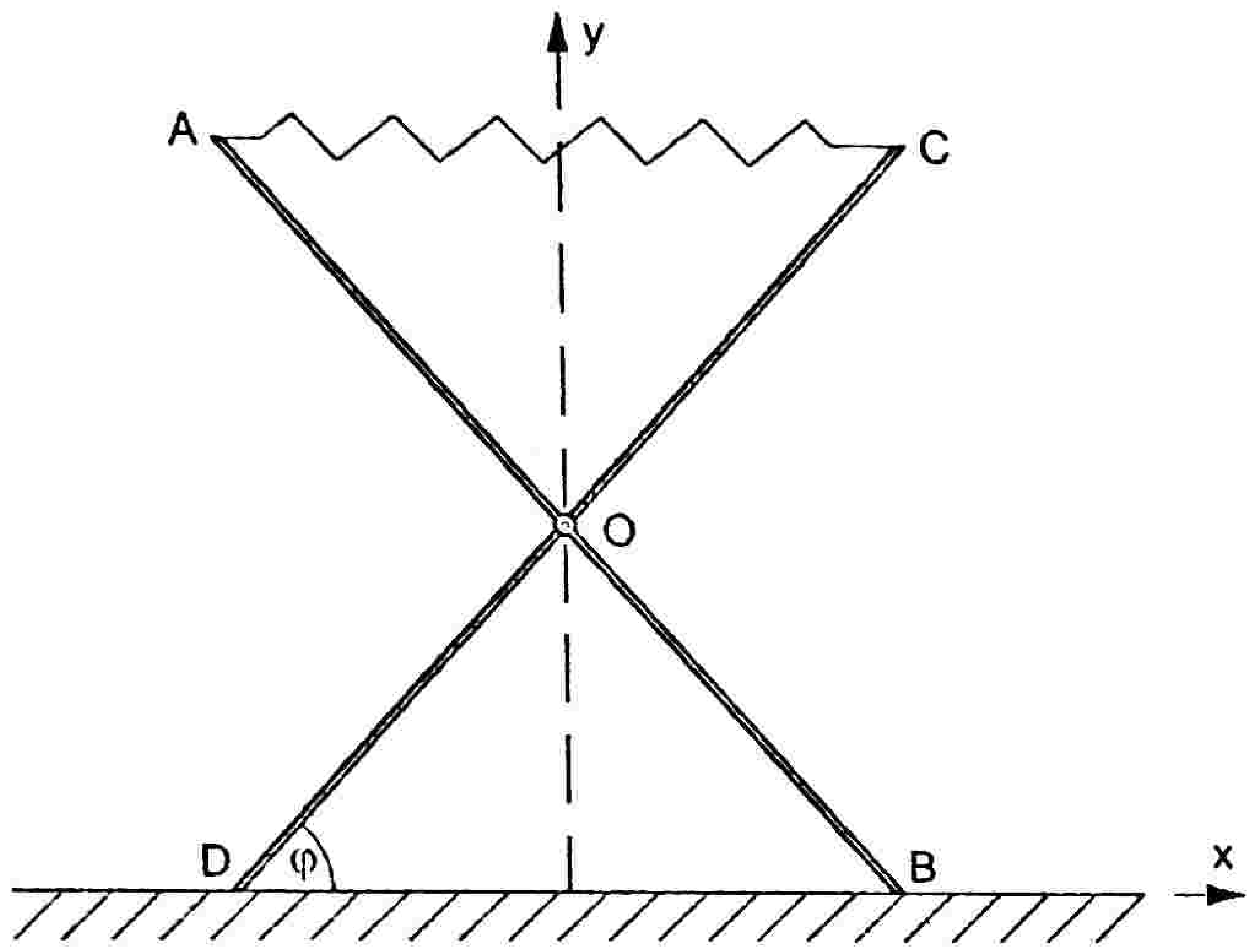
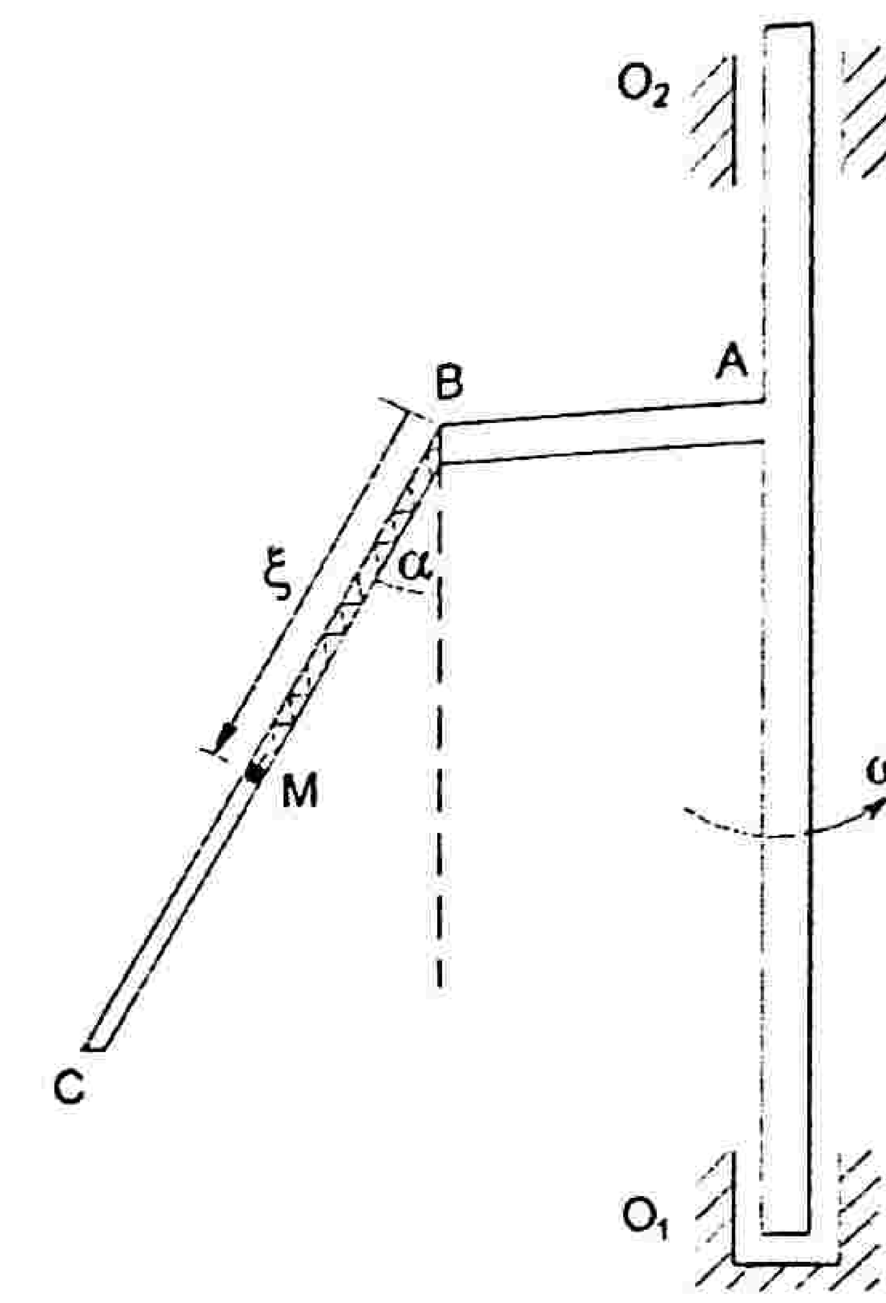
1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva identična homogena štapa AB i CD, od kojih je svaki mase m i dužine $2l$. Štapovi su medjusobno zglobno vezani u tački O (središte masa oba štapa). Krajevi štapova B i D mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi. Slobodni krajevi štapova A i C povezani su oprugom krutosti $c = \frac{mg}{l}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je odredjen uglom φ_0 ($\sin\varphi_0 = 0{,}8$).

a) Odrediti ugaonu brzinu štapova u trenutku t_1 kada štapovi zauzimaju ugao φ_1 u odnosu na horizontalu ($\sin\varphi_1 = 0{,}6$).

b) Odrediti ubrzanje tačke O u početnom trenutku t_0.



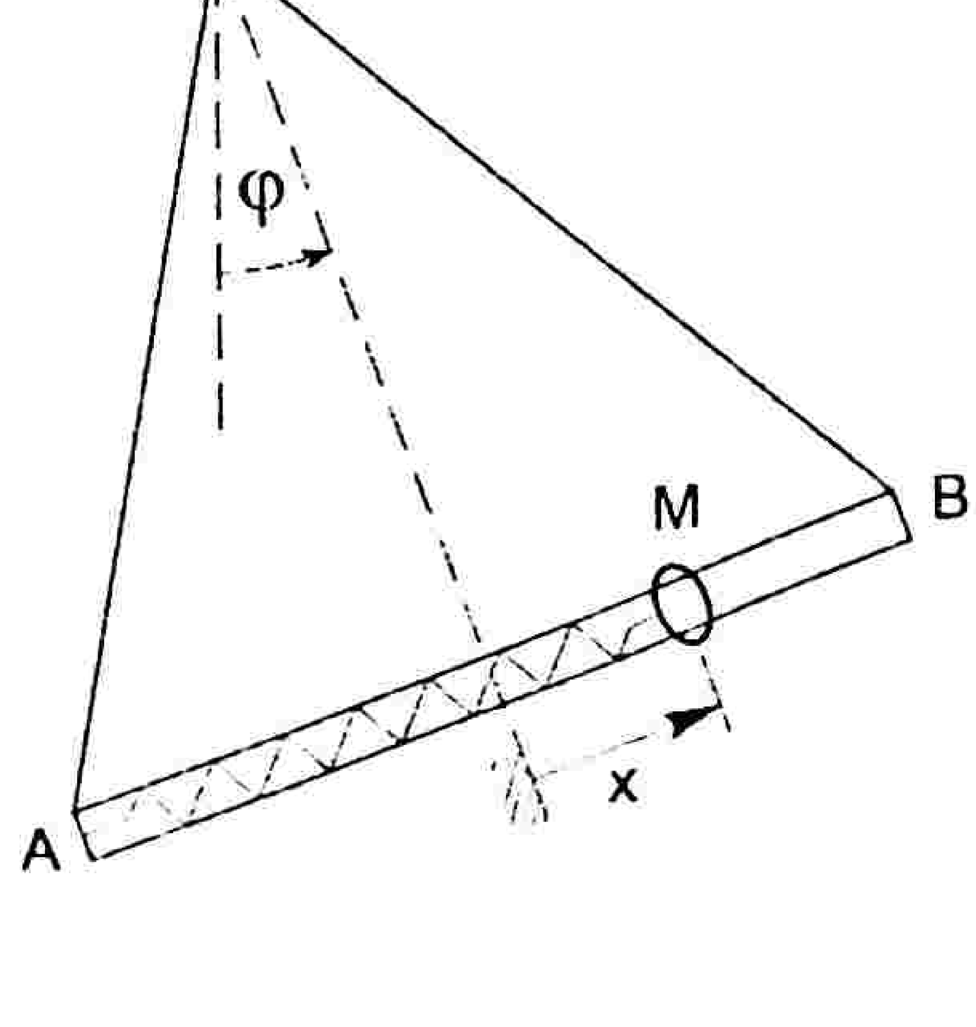


2. Kruta savijena cev ABC obrće se oko nepokretne vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Unutar cevi (po delu BC) može da se kreće bez trenja tačka M mase m. Tačka je vezana oprugom krutosti $c = m\omega_0^2$, drugi kraj opruge vezan je za tačku B. Dužina nenapregnute opruge iznosi l. Položaj tačke M odredjen je relativnom koordinatom ξ, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = l$.

a) Ako je $\overline{AB} = l$ i $\alpha = 30°$, odrediti jednačinu relativnog kretanja tačke $\xi(t)$.

b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$

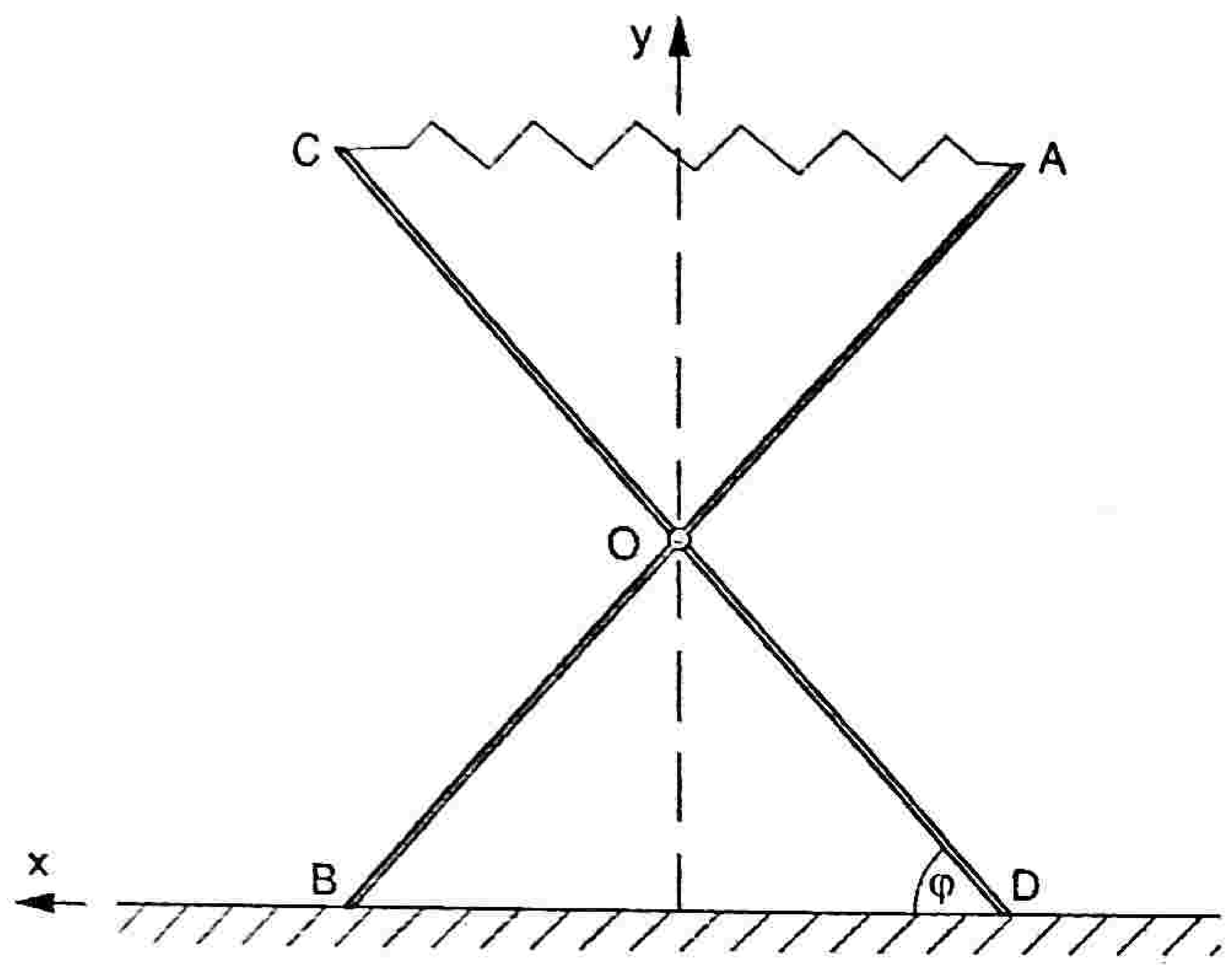
3. Homogeni štap AB mase $2m$ i dužine $2l$ vezan je pomoću dva neistegljiva kanapa za nepokretnu tačku O. Položaj štapa u odnosu na vertikalu odredjen je uglom φ, kao što je prikazano na slici. Duž štapa može da klizi bez trenja prsten M mase m. Prsten je vezan oprugom krutosti c, drugi kraj opruge vezan je u tački A. Položaj prstena u odnosu na štap odredjen je relativnom koordinatom x. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$ (prsten je tada na sredini štapa). Za date generalisane koordinate (φ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Dato je: $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$.

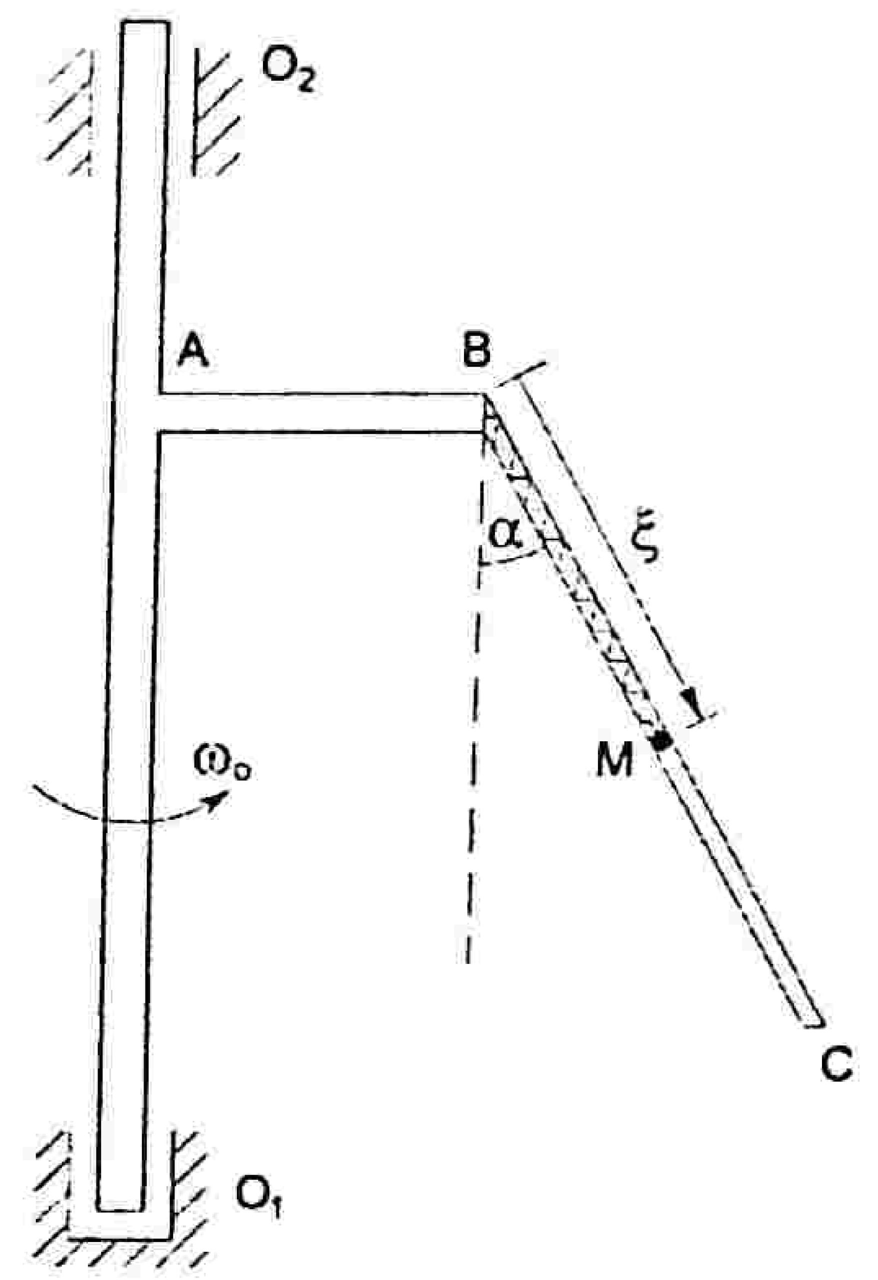


1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva identična homogena štapa AB i CD, od kojih je svaki mase m i dužine $2l$. Štapovi su medjusobno zglobno vezani u tački O (središte masa oba štapa). Krajevi štapova B i D mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi. Slobodni krajevi štapova A i C povezani su oprugom krutosti $c = \frac{mg}{l}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je odredjen uglom φ_0 ($\cos\varphi_0 = 0{,}6$).

a) Odrediti ugaonu brzinu štapova u trenutku t_1 kada štapovi zauzimaju ugao φ_1 u odnosu na horizontalu ($\cos\varphi_1 = 0{,}8$).

b) Odrediti ubrzanje tačke O u početnom trenutku t_0.



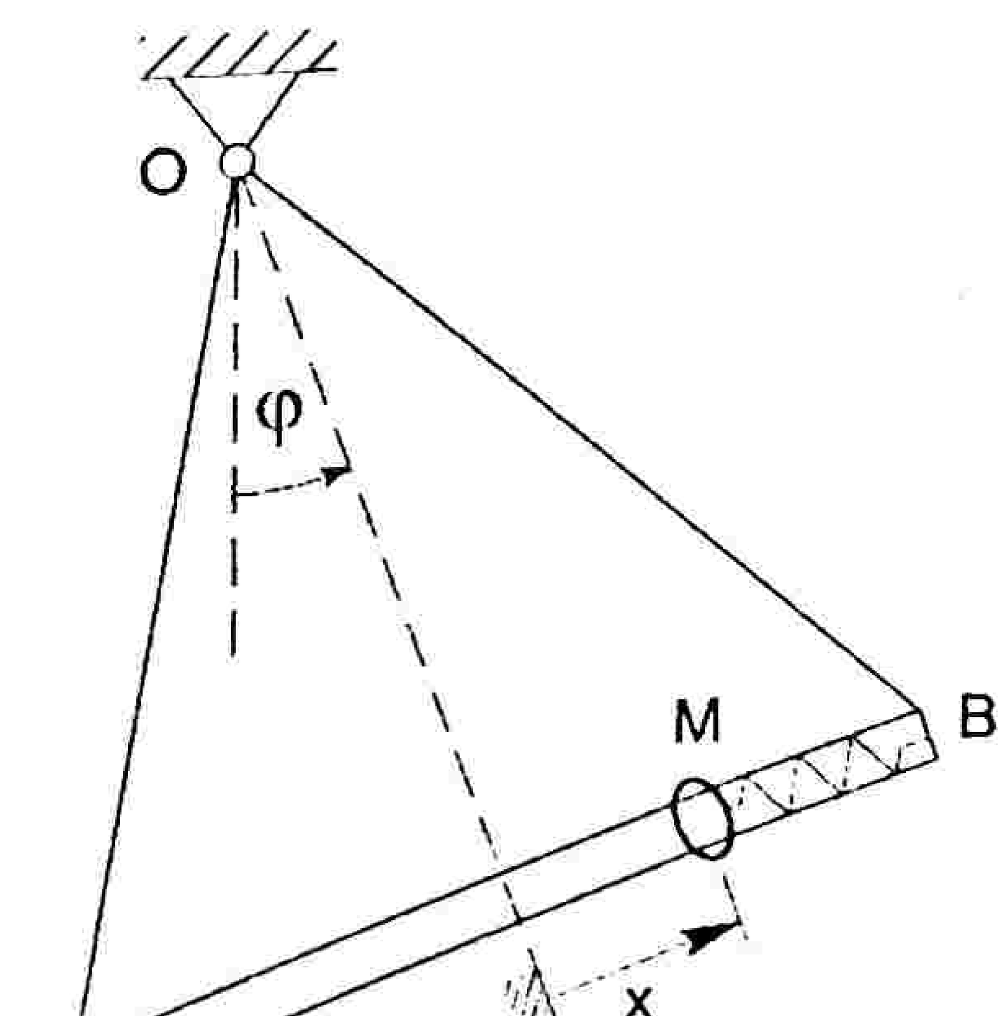


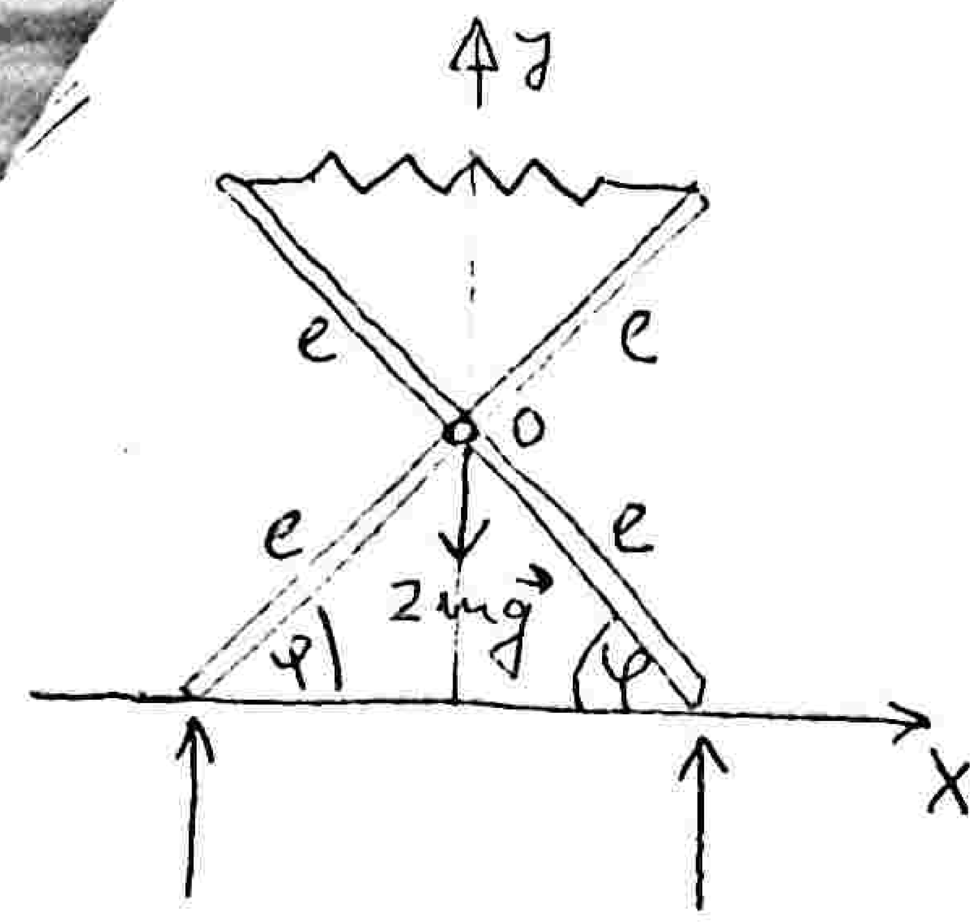
2. Kruta savijena cev ABC obrće se oko nepokretne vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Unutar cevi (po delu BC) može da se kreće bez trenja tačka M mase m. Tačka je vezana oprugom krutosti $c = m\omega_0^2$, drugi kraj opruge vezan je za tačku B. Dužina nenapregnute opruge iznosi l. Položaj tačke M odredjen je relativnom koordinatom ξ, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = l$.

a) Ako je $\overline{AB} = l$ i $\alpha = 30°$, odrediti jednačinu relativnog kretanja tačke $\xi(t)$.

b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) =$?

3. Homogeni štap AB mase $2m$ i dužine $2l$ vezan je pomoću dva neistegljiva kanapa za nepokretnu tačku O. Položaj štapa u odnosu na vertikalu odredjen je uglom φ, kao što je prikazano na slici. Duž štapa može da klizi bez trenja prsten M mase m. Prsten je vezan oprugom krutosti c, drugi kraj opruge vezan je u tački B. Položaj prstena u odnosu na štap odredjen je relativnom koordinatom x. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$ (prsten je tada na sredini štapa). Za date generalisane koordinate (φ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Dato je: $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$.





$$\frac{dK_x}{dt} = 0$$
$$V_{O,x} = const = 0$$
$$X_O = const = 0$$

$$E_K - \overset{\uparrow 0}{E_{K,0}} = A(2m\vec g) + A(\vec F_c)$$
$$Y_O = l\sin\varphi, \quad V_O = \dot Y_O = l\dot\varphi\cos\varphi$$
$$J_O = \frac{m4l^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$$
$$E_K = 2\left(\frac12 mV_O^2 + \frac12 J_O\dot\varphi^2\right)$$
$$E_K = ml^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2$$
$$E_K = ml^2\dot\varphi^2\left(\cos^2\varphi + 1/3\right)$$

$$A(2m\vec g) = 2mgl(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)$$
$$A(\vec F_c) = \frac c2\left(\Delta l_p^2 - \Delta l_k^2\right) = \frac c2\left(0 - (2l\cos\varphi - 2l\cos\varphi_0)^2\right) = \frac{mg}{2l}\left(-4l^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2\right)$$
$$A(\vec F_c) = -2mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2$$

$t_0 = 0$, $\sin\varphi_0 = 4/5$, $\cos\varphi_0 = 3/5$; t_1, $\sin\varphi_1 = 3/5$, $\cos\varphi_1 = 4/5$

$$ml^2\dot\varphi_1^2\left(\cos^2\varphi_1 + 1/3\right) = 2mgl(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_1) - 2mgl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0)^2$$
$$ml^2\dot\varphi_1^2\left(\frac{4^2}{5^2} + 1/3\right) = 2mgl\left(\frac45 - \frac35\right) - 2mgl\left(\frac45 - \frac35\right)^2$$
$$\ldots \quad \boxed{\dot\varphi_1 = \sqrt{\frac{24}{73}\frac gl}}$$

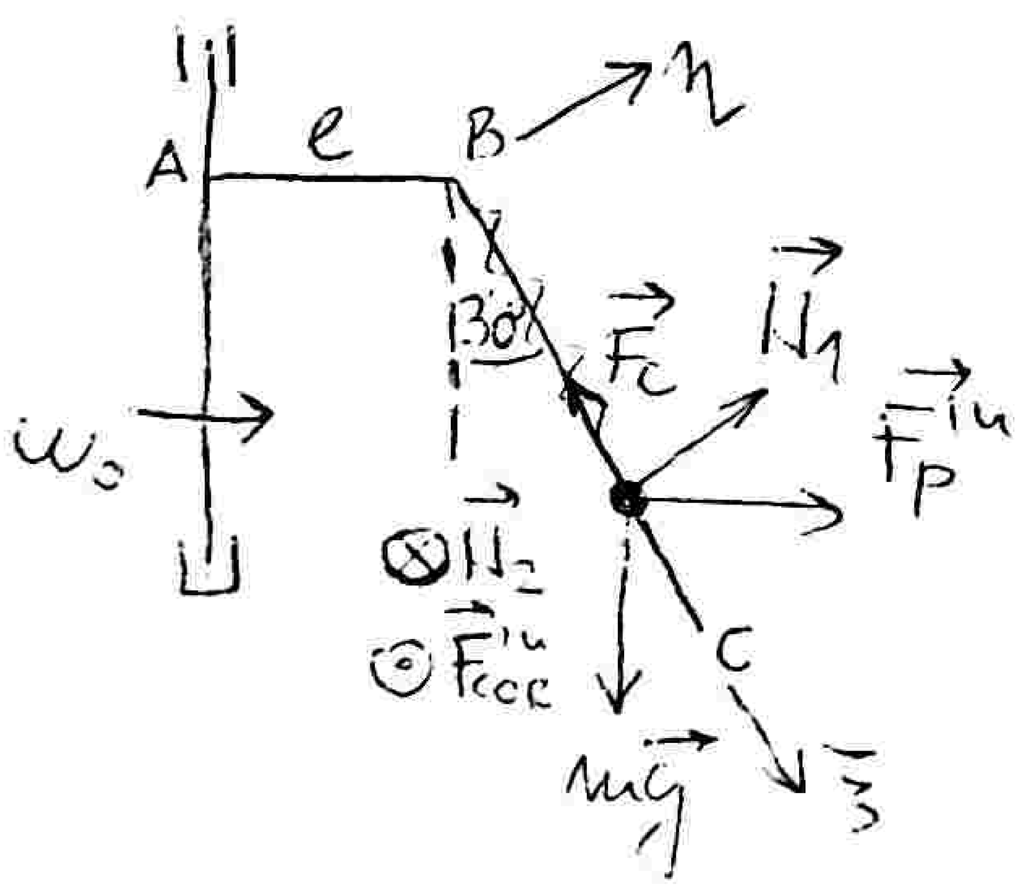
б) $a_O(t_0) = ?$, $a_O = \ddot Y_O = l\ddot\varphi_0\cos\varphi_0 - l\overset{\uparrow 0}{\dot\varphi_0^2}\sin\varphi_0 = l\ddot\varphi_0\cos\varphi_0 = \frac35 l\ddot\varphi_0$

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta A}{dt} \Rightarrow ml^2 2\dot\varphi\ddot\varphi\left(\frac13 + \cos^2\varphi\right) + ml^2\dot\varphi^2(-2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot\varphi) =$$
$$= -2mgl\cos\varphi\cdot\dot\varphi - 2mgl\cdot 2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)(-\dot\varphi\sin\varphi)$$

t_0, $\dot\varphi_0 = 0$, $\rightarrow$ $2l\ddot\varphi_0\left(\frac13 + \frac{9}{25}\right) + 0 = -2g\frac35 + 0$

$$\ddot\varphi_0 = -\frac{45}{52}\frac gl, \quad \boxed{a_O = -\frac{27}{52}g}$$

(2)



$$m\vec a_r = m\vec g + \vec F_c + \vec N_1 + \vec N_2 + \vec F_p^{in} + \vec F_{cor}^{in}$$
$$m\ddot\xi = mg\frac{\sqrt3}{2} - c(\xi - l) + m\omega_0^2\left(l + \frac{\xi}{2}\right)\frac12$$
$$m\ddot\xi + m\omega_0^2\xi - \frac{m\omega_0^2}{4}\xi = \frac{\sqrt3}{2}mg + m\omega_0^2 l + \frac{m\omega_0^2 l}{2}$$
$$\ddot\xi + \frac34\omega_0^2\xi = \frac{\sqrt3}{2}\cdot g + \frac32\omega_0^2 l$$
$$\xi_h = C_1\cos\frac{\sqrt3}{2}\omega_0 t + C_2\sin\frac{\sqrt3}{2}\omega_0 t$$
$$\xi_p = \frac{2}{\sqrt3}\frac{g}{\omega_0^2} + 2l$$

$$\xi = \xi_h + \xi_p = C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} + 2l$$

$$\xi_0 = l = C_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} + 2l \quad , \quad C_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} - l$$

$$\dot\xi_0 = 0, \quad 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 C_2 \quad , \quad C_2 = 0$$

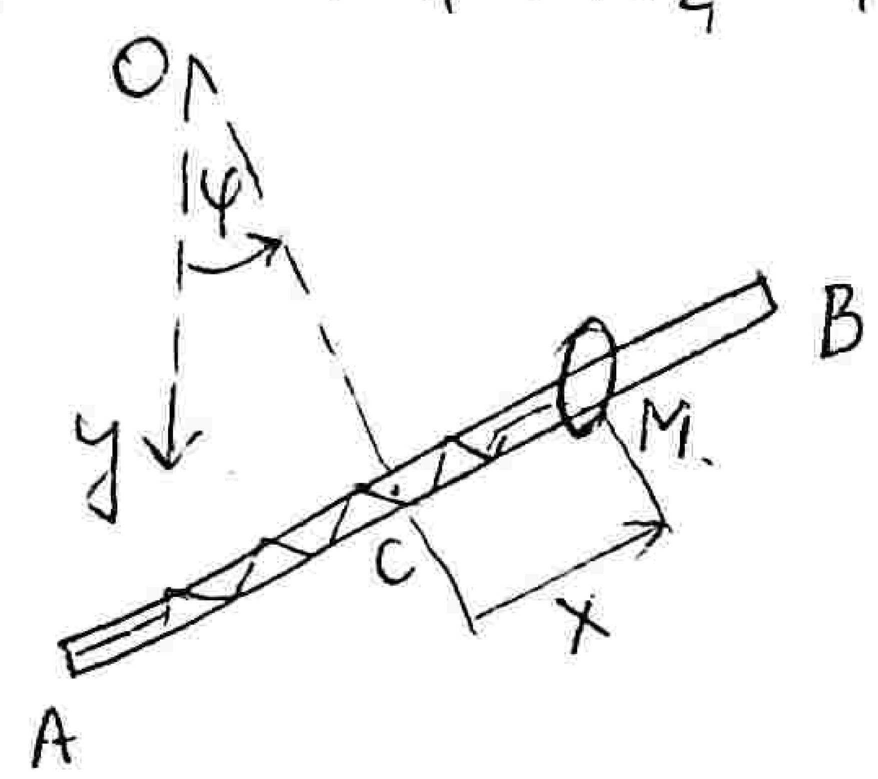
$$\boxed{\xi(t) = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} + l\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} + 2l}$$

б) $m\ddot\eta = 0 = -\frac{mg}{2} + N_1 + m\omega_0^2\left(l + \frac{\xi}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$, $N_1 = \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}m\omega_0^2\left(l+\frac{\xi}{2}\right) = \ldots$

$F^{in}_{cor} = N_2$, $\boxed{N_2 = 2m\omega_0\dot\xi\sin 150° = m\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{\omega_0^2} + l\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t}$

$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \ldots$

3)



$$E_k = \frac{1}{2}J_O\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mV_M^2$$

$$J_O = J_C + 2m\overline{OC}^2 = \frac{2m4l^2}{12} + 2m(\sqrt{3}l)^2 = \frac{20}{3}ml^2$$

$$\vec V_M = \vec V_p + \vec V_r = \vec V_C + \vec V_M^C + \vec V_r$$

$$V_M^2 = (V_C + V_r)^2 + (V_M^C)^2 = (\sqrt{3}l\dot\varphi + \dot x) + (x\dot\varphi)^2$$

$$V_M^2 = 3l^2\dot\varphi^2 + \dot x^2 + 2\sqrt{3}l\dot\varphi\dot x + x^2\dot\varphi^2$$

$$E_k = \frac{29}{6}ml^2\dot\varphi^2 + \frac{m\dot x^2}{2} + \sqrt{3}ml\dot x\dot\varphi + \frac{m}{2}x^2\dot\varphi^2$$

$$\delta A(2m\vec g) = 2mg\,\delta y_C = 2mg\,\delta(\sqrt{3}l\cos\varphi) = -2mg\sqrt{3}l\sin\varphi\,\delta\varphi$$

$$y_M = \sqrt{3}l\cos\varphi - x\sin\varphi \quad , \quad \delta y_M = -\sqrt{3}l\sin\varphi\,\delta\varphi - \sin\varphi\,\delta x - x\cos\varphi\,\delta\varphi$$

$$\delta A(m\vec g) = -mg(\sqrt{3}l\sin\varphi + x\cos\varphi)\delta\varphi - mg\sin\varphi\,\delta x$$

$$\delta A(\vec F_c) = -F_c\,\delta x = -cx\,\delta x$$

$$Q_\varphi = -3\sqrt{3}mgl\sin\varphi - mgx\cos\varphi \quad , \quad Q_x = -mg\sin\varphi - cx$$

Диф. Ј-НЕ II ВРСТЕ

$$\frac{29}{3}ml^2\ddot\varphi + \sqrt{3}ml\ddot x + 2mx\dot x\dot\varphi + mx^2\ddot\varphi = -3\sqrt{3}mgl\sin\varphi - mgx\cos\varphi$$

$$m\ddot x + \sqrt{3}ml\ddot\varphi - mx\dot\varphi^2 = -mg\sin\varphi - cx$$