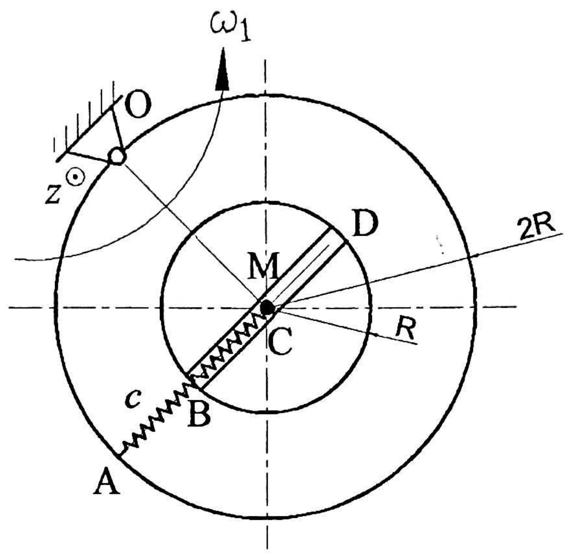
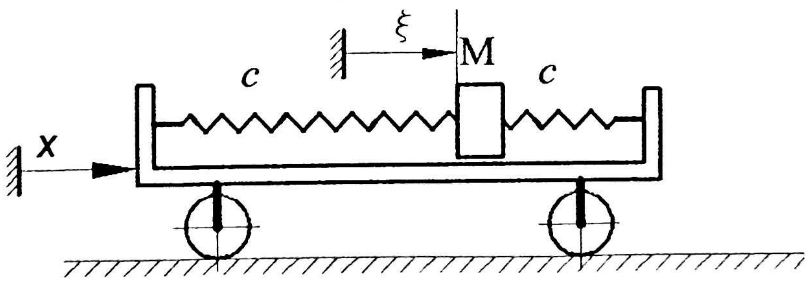
Mehanika 3, G1 Jul 2021.

1. Horizontalna ploča oblika koakcijalnog diska poluprečnika R i 2R, mase m i poluprečnika inercije $i_O=3R$ može da se obrće oko vertikalne ose Oz. Po kanalu BD kreće se tačka M mase m koja je oprugom krutosti c vezana za tačku A ploče. U početnom trenutku, kada se tačka M nalazila u položaju D sistem je mirovao. Odrediti ugaonu brzinu ploče ($\omega_1$) u trenutku $t_1$ kada tačka M stigne u tačku C (položaj prikazan na slici). Veze su idealne. Dužina nenapregnute opruge je R.




Slika uz zadatak 1

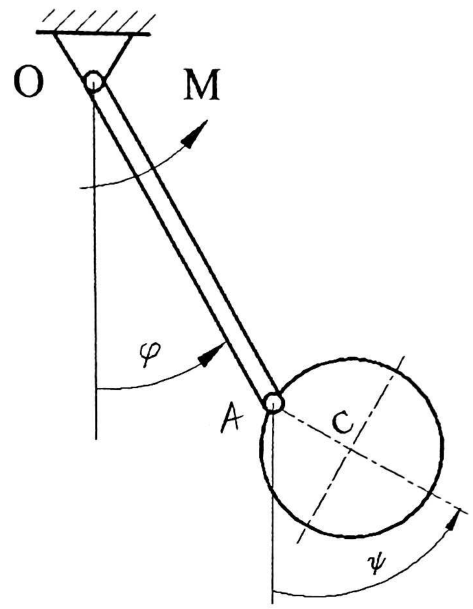
2. Teret M mase m=1 koji je oprugama krutosti c=1 vezan za kućište kreće se po idealno glatkoj površini istog kućišta. Opruga je nenapregnuta u položaju $\xi=0$ (koordinatna osa $\xi$ vezana je za kućište). Homogeni diskovi kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište se kreće po zakonu $x=\sin(t)$. U početnom trenutku sistem je mirovao i relativna koordinata tačke M bila je $\xi(0)=0$. Mase diskova i kućišta zanemariti. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M, $\xi=\xi(t)$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.




Slika uz zadatak 2

ЈУН 2021.

3. Štap OA dužine $2R$, mase m zglogno je vezan za nepomičnu tačku O i disk kao na slici. Homogeni disk je mase $m$ i poluprečnika $R$. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Na štap dejstvuje spreg sila momenta intenziteta $M$, pravca i smera kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane coordinate $\varphi$ i $\psi$.




Slika uz zadatak 3

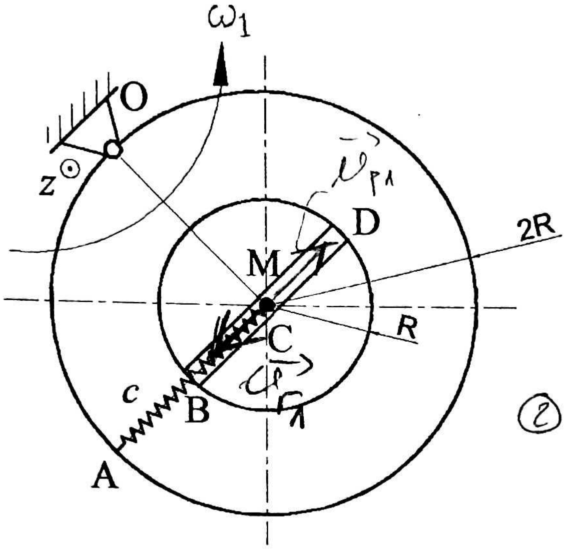
$R, 2R, m, l_0 = 3R$

$M, m$

$c$

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0 , \quad L_{Oz} = const$$

$$L_{Oz1} = L_{Oz0} = 0 \qquad (1)$$




$$L_{Oz1} = J_{Oz} \cdot \omega_1 + m \cdot 2R v_{p1} - m 2R v_{r1} \qquad (2)$$

$$\boxed{v_{p1} = 2R\omega_1}$$

(1) и (2) $\rightarrow$ $\boxed{v_{r1} = \frac{13}{2} R\omega_1}$

$$E_{k1} - \underbrace{\cancel{E_{k0}}}_{=0} = \sum A$$

$$\frac{1}{2} J_{Oz} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m (v_{p1} - v_{r1})^2 = \frac{1}{2} c \left((3R-R)^2 - (2R-R)^2\right)$$

$$\frac{117}{8} m R^2 \omega_1^2 = \frac{3}{2} c R^2$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{12}{117} \frac{c}{m}}$$

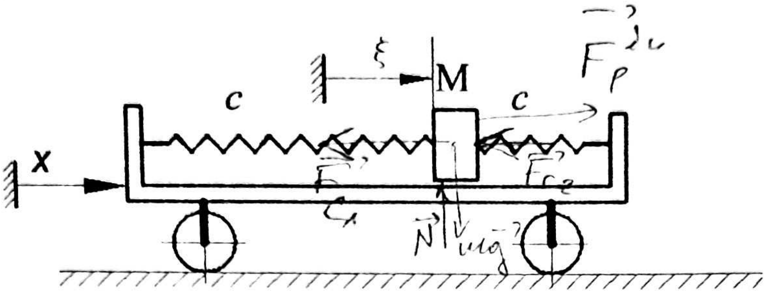
2. $c = 1;\ m = 1$

$\xi_0 = 0,\ \dot{\xi}_0 = 0$

$x = \sin t$

$\xi(0) = 0$

$\dot{\xi}(0) = 0$




$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{c_1} + \vec{F}_{c_2} + \vec{F}_p^{in}$$

$$\xi:\ m\ddot{\xi} = -2c\xi - m\ddot{x}$$

$$\dot{x} = \cos t \rightarrow \ddot{x} = -\sin t.$$

$$\ddot{\xi} + \frac{2c}{m}\xi = \sin t$$

$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\xi = \sin t} \qquad \xi = \xi_h + \xi_p$$

$$\xi_p = A\sin t \rightarrow \underline{A = 1}$$

$$\xi_p = \sin t$$

$$\lambda^2 + 2 = 0,\ \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}\, i$$

$$\xi_h = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t$$

$$\xi = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t + \sin t$$

$$\xi(0) = 0 \qquad C_1 = 0$$

$$\dot{\xi}(0) = 0 \sim \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t + \sin t}$$

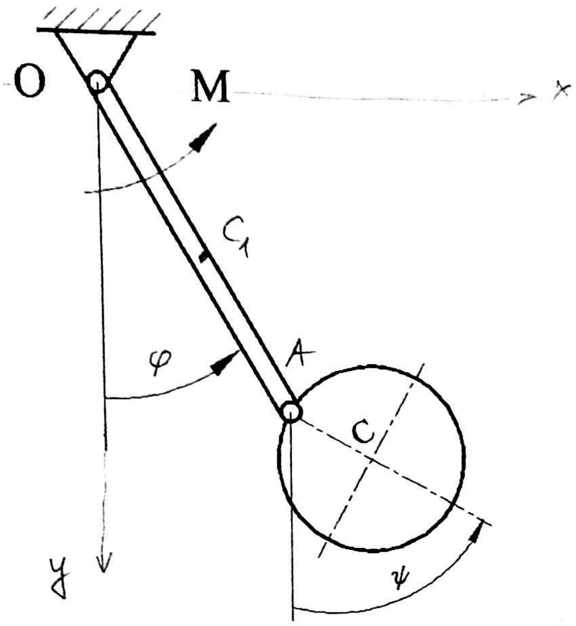
$OA = 2R$, $m$

$m$, $R$

$M$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_{O_2} \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} \cdot \dot{\psi}^2$$

$$T = \frac{8}{3} mR^2 \dot{\varphi}^2 + 2mR^2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{3}{4} R^2 m \dot{\psi}^2$$




$$x_c = 2R\sin\varphi + R\sin\psi$$

$$y_c = 2R\cos\varphi + R\cos\psi$$

$$y_{c1} = R\cos\varphi$$

$$\delta A = [M - 3mgR\sin\varphi]\delta\varphi -$$

$$- Rmg\sin\psi\,\delta\psi$$

$$Q_\varphi = M - 3R\sin\varphi\, mg$$

$$Q_\psi = -R\sin\psi\, mg$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (1) \qquad 2mR^2 \cancel{\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + 2mR^2\dot{\varphi}(-\sin(\varphi-\psi))} \cdot$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi \quad (2)$$

(2) $2mR^2 \ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - 2mR^2\dot{\varphi}\sin(\varphi-\psi)\cdot(\dot{\varphi}-\dot{\psi}) + \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\psi} -$

$- 2mR^2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi) = -R\sin\psi\, mg$

(1) $\frac{16}{3} mR^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2 \ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) - 2mR^2\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi)(\dot{\varphi}-\dot{\psi})$

$+ 2mR^2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi) = M - 3R\sin\varphi\, mg$