

## МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

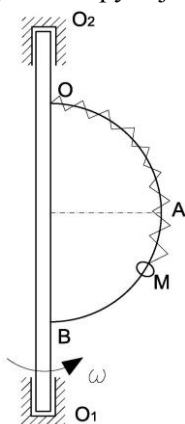
29. август 2019.

Прва група

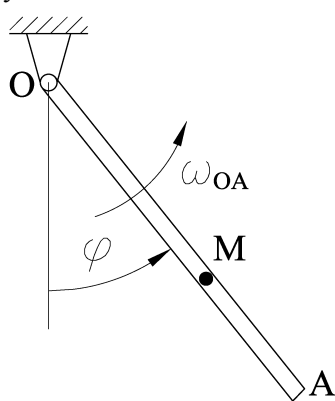
1. По глаткој жици  $OAB$  савијеној тако да има облик полукруга полупречника  $R$ , може да клизи прстен  $M$  масе  $2m$  (слика 1). Жица је крајевима  $O$  и  $B$  заварена за вертикалну осовину  $O_1O_2$  и може да се обрће око вертикалне осе. Маса жице је  $m$ , а полупречник инерције у односу на осу обртања је  $i_{Oz} = R$ . Прстен је опругом крутости  $c = mg/(R\pi^2)$  везан за тачку  $O$ . У почетном тренутку прстен је био у положају  $B$  у релативном мировању, а угаона брзина жице била је  $\omega_0$ . Ако је дужина ненапрегнуте опруге  $l_0 = \frac{1}{2}R\pi$ , одредити угаону брзину жице у тренутку када прстен стигне у положај  $A$  и релативну брзину прстена у том тренутку. Који услов, у том случају, мора испунити угаона брзина  $\omega_0$ ?

2. Глатка цев  $OA$  обрће се константном угаоном брзином  $\omega_{OA} = 4\omega_0$  око хоризонталне осе  $Oz$ , управне на раван цртежа (слика 2). Унутар цеви може да се креће тачка  $M$ , масе  $m$ . Током кретања, на тачку  $M$  делује сила отпора средине пропорционална апсолутној брзини тачке, са коефицијентом пропорционалности  $6m\omega_0$ . У почетном тренутку ( $t_0 = 0$ ), тачка је била у положају  $O$  у стању релативног мировања, а цев је заузимала вертикалан правац ( $\varphi_0 = 0$ ). Одредити коначну једначину релативног кретања тачке у односу на цев и реакцију цеви у зависности од времена.

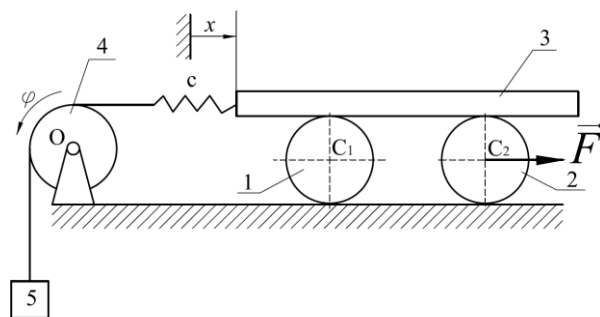
3. Систем приказан на слици састоји се од два хомогена диска, 1 и 2, маса  $m$  и полупречника  $R$ , који могу да се котрљају без клизања по хоризонталној подлози; зупчасте летве 3, масе  $m$ ; хомогеног диска 4, масе  $m$  и полупречника  $R$  и терета 5, масе  $m$  (слика 3). За зупчасту летву везана је опруга крутости  $c$ , која је другим крајем везана за лако неистегљиво уже. Уже је пребачено преко диска 4. Диск 4 обрће се око хоризонталне осе која пролази кроз тачку  $O$ . Други крај ужета везан је за терет 5 који може да се креће у вертикалној равни. На центар диска 2 делује сила хоризонталног правца, интензитета  $F$ . За задате генерализане координате ( $x, \varphi$ ) одредити диференцијалне једначине кретања система. За  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

## МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

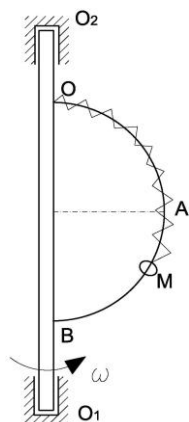
29. август 2019.

Друга група

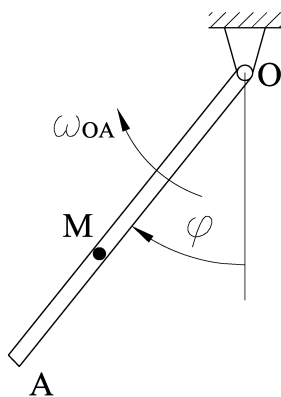
1. По глаткој жици  $OAB$  савијеној тако да има облик полукруга полупречника  $R$ , може да клизи прстен  $M$  масе  $m$ . Жица је крајевима  $O$  и  $B$  заварена за вертикалну осовину  $O_1O_2$  и може да се обрће око вертикалне осе. Маса жице је  $2m$ , а полупречник инерције у односу на осу обртања је  $i_{Oz} = R$ . Прстен је опругом крутости  $c = mg/(R\pi^2)$  везан за тачку  $O$ . У почетном тренутку прстен је био у положају  $B$  у релативном мировању, а угаона брзина жице била је  $\omega_0$ . Ако је дужина ненапрегнуте опруге  $l_0 = \frac{1}{2}R\pi$ , одредити угаону брзину жице у тренутку када прстен стигне у положај  $A$  и релативну брзину прстена у том тренутку. Који услов, у том случају, мора испунити угаона брзина  $\omega_0$ ?

2. Глатка цев  $OA$  обрће се константном угаоном брзином  $\omega_{OA} = 4\omega_0$  око хоризонталне осе  $Oz$ , управне на раван цртежа (слика 2). Унутар цеви може да се креће тачка  $M$ , масе  $m$ . Током кретања, на тачку  $M$  делује сила отпора средине пропорционална апсолутној брзини тачке, са коефицијентом пропорционалности  $6m\omega_0$ . У почетном тренутку ( $t_0 = 0$ ), тачка је била у положају  $O$  у стању релативног мировања, а цев је заузимала вертикалан правац ( $\varphi_0 = 0$ ). Одредити коначну једначину релативног кретања тачке у односу на цев и реакцију цеви у зависности од времена.

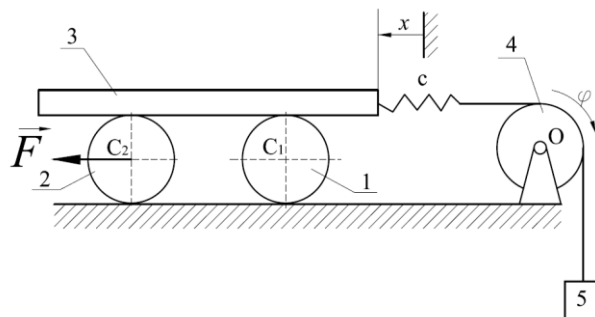
3. Систем приказан на слици састоји се од два хомогена диска, 1 и 2, маса  $m$  и полупречника  $R$ , који могу да се котрљају без клизања по хоризонталној подлози; зупчасте летве 3, масе  $m$ ; хомогеног диска 4, масе  $m$  и полупречника  $R$  и терета 5, масе  $m$  (слика 3). За зупчасту летву везана је опруга крутости  $c$ , која је другим крајем везана за лако неистегљиво уже. Уже је пребачено преко диска 4. Диск 4 обрће се око хоризонталне осе која пролази кроз тачку  $O$ . Други крај ужета везан је за терет 5 који може да се креће у вертикалној равни. На центар диска 2 делује сила хоризонталног правца, интензитета  $F$ . За задате генерализане координате ( $x, \varphi$ ) одредити диференцијалне једначине кретања система. За  $x = 0$  и  $\varphi = 0$  опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

## 1. Задатак

1. Група

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0 \Rightarrow L_{Oz} = \text{const} \Rightarrow L_{Oz}(1) = L_{Oz}(0)$$

$$\dot{L}_{Oz} = J_{Oz} \omega = mR^2 \omega \Rightarrow \dot{L}_{Oz}(0) = mR^2 \omega_0, \dot{L}_{Oz}(1) = mR^2 \omega_1; L_{Oz}^M(0) = 0, L_{Oz}^M(1) = 2mRV_{p1} = 2mR^2 \omega_1$$

$$L_{Oz}(0) = mR^2 \omega_0, L_{Oz}(1) = mR^2 \omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{1}{3} \omega_0}$$

\*\*\*\*\*

$$E_{k1} - E_{k0} = A(2m\vec{g}) + A(\vec{F}_c)$$

$$E_k^{\dot{}} = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega^2 = \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \Rightarrow E_{k0}^{\dot{}} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_0^2, E_{k1}^{\dot{}} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_1^2 = \frac{1}{18} mR^2 \omega_0^2$$

$$E_{k0}^M = 0, E_{k1}^M = \frac{1}{2} 2m(V_{r1}^2 + V_{p1}^2) = m(V_{r1}^2 + R^2 \omega_1^2) = mV_{r1}^2 + \frac{1}{9} mR^2 \omega_0^2$$

$$E_{k1} = mV_{r1}^2 + \frac{1}{6} mR^2 \omega_0^2, E_{k0} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_0^2$$

\*\*\*\*\*

$$A(2m\vec{g}) = -2mgR, A(\vec{F}_c) = \frac{1}{2} c(\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2) = \frac{1}{2} \frac{mg}{R\pi^2} \left( \left( \frac{1}{2} R\pi \right)^2 - 0 \right) = \frac{1}{8} mgR$$

\*\*\*\*\*

$$\boxed{V_{r1} = \sqrt{\frac{1}{3} R^2 \omega_0^2 - \frac{15}{8} gR}}, \quad \frac{1}{3} R^2 \omega_0^2 - \frac{15}{8} gR \geq 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 \geq \sqrt{\frac{45}{8} \frac{g}{R}}}$$

2. Група

$$\dot{L}_{Oz} = J_{Oz} \omega = 2mR^2 \omega \Rightarrow \dot{L}_{Oz}(0) = 2mR^2 \omega_0, \dot{L}_{Oz}(1) = 2mR^2 \omega_1; L_{Oz}^M(0) = 0, L_{Oz}^M(1) = mRV_{p1} = mR^2 \omega_1$$

$$L_{Oz}(0) = 2mR^2 \omega_0, L_{Oz}(1) = 3mR^2 \omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \frac{2}{3} \omega_0}$$

\*\*\*\*\*

$$E_{k1} - E_{k0} = A(m\vec{g}) + A(\vec{F}_c)$$

$$E_k^{\dot{}} = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega^2 = \frac{1}{2} 2mR^2 \omega^2 \Rightarrow E_{k0}^{\dot{}} = mR^2 \omega_0^2, E_{k1}^{\dot{}} = mR^2 \omega_1^2 = \frac{4}{9} mR^2 \omega_0^2$$

$$E_{k0}^M = 0, E_{k1}^M = \frac{1}{2} m(V_{r1}^2 + V_{p1}^2) = \frac{1}{2} m(V_{r1}^2 + R^2 \omega_1^2) = \frac{1}{2} mV_{r1}^2 + \frac{2}{9} mR^2 \omega_0^2$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} mV_{r1}^2 + \frac{2}{3} mR^2 \omega_0^2, E_{k0} = mR^2 \omega_0^2$$

\*\*\*\*\*

$$A(m\vec{g}) = -mgR, A(\vec{F}_c) = \frac{1}{2} c(\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2) = \frac{1}{2} \frac{mg}{R\pi^2} \left( \left( \frac{1}{2} R\pi \right)^2 - 0 \right) = \frac{1}{8} mgR$$

\*\*\*\*\*

$$\boxed{V_{r1} = \sqrt{\frac{2}{3} R^2 \omega_0^2 - \frac{7}{4} gR}}, \quad \frac{2}{3} R^2 \omega_0^2 - \frac{7}{4} gR \geq 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 \geq \sqrt{\frac{21}{8} \frac{g}{R}}}$$

## 2. Задатак

| 1. Група | 2. Група |
|----------|----------|
|          |          |

$$\vec{F}_O = -6m\omega_0 \vec{V}_M = -6m\omega_0 \vec{V}_r - 6m\omega_0 \vec{V}_p \Rightarrow \vec{F}_{O1} = -6m\omega_0 \vec{V}_r, \vec{F}_{O2} = -6m\omega_0 \vec{V}_p$$

$$V_p = \omega_{OA} \xi = 4\omega_0 \xi, \quad F_{pn}^{in} = m\omega_{OA}^2 \xi = 16m\omega_0^2 \xi, \quad F_{cor}^{in} = 2m\omega_{OA} \dot{\xi} = 8m\omega_0 \dot{\xi}$$

\*\*\*\*\*

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{O1} + \vec{F}_{O2} + \vec{F}_{pn}^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}$$

$$\varphi = \omega_{OA} t = 4\omega_0 t$$

$$m\ddot{\xi} = mg \cos \varphi + F_{pn}^{in} - 6m\omega_0 \dot{\xi} \Rightarrow \ddot{\xi} + 6\omega_0 \dot{\xi} - 16\omega_0^2 \xi = g \cos(4\omega_0 t)$$

\*\*\*\*\*

$$\lambda_{1,2} = -3\omega_0 \pm 5\omega_0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\omega_0, \lambda_2 = -8\omega_0 \Rightarrow \xi_h = C_1 e^{2\omega_0 t} + C_2 e^{-8\omega_0 t}$$

$$\xi_p = A \cos(4\omega_0 t) + B \sin(4\omega_0 t)$$

$$A = -\frac{g}{50\omega_0^2}, \quad B = \frac{3g}{200\omega_0^2} \Rightarrow \xi_p = -\frac{g}{50\omega_0^2} \cos(4\omega_0 t) + \frac{3g}{200\omega_0^2} \sin(4\omega_0 t)$$

$$\xi = C_1 e^{2\omega_0 t} + C_2 e^{-8\omega_0 t} - \frac{g}{50\omega_0^2} \cos(4\omega_0 t) + \frac{3g}{200\omega_0^2} \sin(4\omega_0 t), \quad C_1 = \frac{g}{100\omega_0^2}, \quad C_2 = \frac{g}{100\omega_0^2}$$

$$\xi = \frac{g}{100\omega_0^2} e^{2\omega_0 t} + \frac{g}{100\omega_0^2} e^{-8\omega_0 t} - \frac{g}{50\omega_0^2} \cos(4\omega_0 t) + \frac{3g}{200\omega_0^2} \sin(4\omega_0 t)$$

\*\*\*\*\*

$$m\ddot{\eta} = N - mg \sin \varphi - F_{cor}^{in} - 24m\omega_0^2 \xi = 0 \Rightarrow N = mg \sin(4\omega_0 t) + 8m\omega_0 \dot{\xi} + 24m\omega_0^2 \xi$$

$$N = \frac{2}{5} m g e^{2\omega_0 t} - \frac{2}{5} m g e^{-8\omega_0 t} + 2 m g \sin(4\omega_0 t)$$

### 3. Задатак

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} + E_k^{(3)} + E_k^{(4)} + E_k^{(5)}$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2} m V_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_{Cz1} \omega_1^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{\dot{x}}{2R} \right)^2 = \frac{3}{16} m \dot{x}^2, \quad E_k^{(2)} = E_k^{(1)} = \frac{3}{16} m \dot{x}^2$$

$$E_k^{(3)} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad E_k^{(4)} = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega_4^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2, \quad E_k^{(5)} = \frac{1}{2} m V_5^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

\*\*\*\*\*

$$E_k = \frac{7}{8} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

\*\*\*\*\*

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{4} m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{4} m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi}$$

\*\*\*\*\*

$$\delta A(\vec{F}) = F \delta x_{C_2} = \frac{1}{2} F \delta x \Rightarrow Q_x^{\vec{F}} = \frac{1}{2} F$$

$$\delta A(m_5 \vec{g}) = mgR \delta \varphi \Rightarrow Q_\varphi^{m_5 \vec{g}} = mgR$$

$$E_p(\vec{F}_c) = \frac{1}{2} c(x + R\varphi)^2 \Rightarrow Q_x^{\vec{F}_c} = -\frac{\partial E_p(\vec{F}_c)}{\partial x} = -c(x + R\varphi), \quad Q_\varphi^{\vec{F}_c} = -\frac{\partial E_p(\vec{F}_c)}{\partial \varphi} = -cR(x + R\varphi)$$

$$Q_x = \frac{1}{2} F - c(x + R\varphi), \quad Q_\varphi = mgR - cR(x + R\varphi)$$

\*\*\*\*\*

|                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x: \quad \frac{7}{4} m \ddot{x} = \frac{1}{2} F - c(x + R\varphi)$ $\varphi: \quad \frac{3}{2} m R \ddot{\varphi} = mg - c(x + R\varphi)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

