Diferencijalne jednačine višeg reda (dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}.$$

   Da li postoje singularna rešenja?

2. Naći opšte rešenje DJ 2.reda $\dfrac{y''}{y'} + \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$.

3. Naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$xy'' + 2(x+1)y' + 2y = x^2 - x + 1$$

   ukoliko je poznato da njena odgovarajuća homogena jednačina ima jedno rešenje oblika $y_{1h}(x) = x^p$, gde je p konstanta koju treba odrediti.

Uputstva i konačni odgovori

1. Zadata jednačina ne sadrži nepoznatu funkciju y, tako da prvi snižavamo red - uvodimo novu nepoznatu funkciju $z = z(x)$, za koju važi:

$$y' = z, \;\; y'' = z'.$$

   Dobijamo homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda, čije je opšte rešenje

$$z = 2\left(x\ \arctan(C_1 x) + k\pi\right),$$

   odakle integracijom dobijamo da je opšte rešenje polazne jednačine

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2}\right)\arctan(C_1 x) + k\pi x^2 - \frac{1}{C_1}x + C_2.$$

   Singularna rešenja su

$$y = \frac{k\pi}{2}x^2 + C \quad (k \in \{0, \pm1, \pm2\ldots\})$$

   .

2. $\dfrac{y^3}{3} + y = C_1\,x + C_2$ (uvesti smenu $y' = z(y)$, ima još načina...).

3. Metodama pokazanim na predavanju pronalazimo $p = -1$, a zatim pomoću Abelove formule (Liuvilove, ili po kome se već zove) $y_{2h} = -\frac{1}{2x}e^{-2x}$. Odgovarajuće partikularno rešenje prvo probavamo da nadjemo u obliku $y_p = const$ - ne ide, zatim probavamo da ga nadjemo u obliku $y_p = ax+b$ - ne ide. Konačno, ako pretpostavimo $y_p = ax^2+bx+c$, imamo $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$ i dobijamo $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{2}$ i $c = 1$. Konačno,
$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{2x}e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu