Rešenja zadataka (Grupa 1.)

1. Kružnica $x^2 + y^2 = 2x$, tj. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ima centar u tački $(0,1)$ a poluprečnik joj je 1. Njen deo iznad x ose usmeren od tačke $A(2,0)$ do tačke $O(0,0)$ je kriva C. Duž od tačke O do tačke A označimo sa $\overline{OA}$. Pošto je ovde $y = 0$ i $dy = 0$ to će dati integral po duži $\overline{OA}$ biti jednak nuli.

Kako je

$$I = \int_{C\cup\overline{OA}} (x^2 \sin y + 2y^2)\, dx + \left(\frac{x^3}{3}\cos y - 2\right)\, dy - \int_{\overline{OA}} (x^2 \sin y + 2y^2)\, dx + \left(\frac{x^3}{3}\cos y - 2\right)\, dy,$$

i pošto je drugi integral jednak nuli, ostaje da se reši prvi. Prvi integral može da se reši korišćenjem Green-ove formule, dakle

$$I = \int_{C\cup\overline{OA}} (x^2 \sin y + 2y^2)\, dx + \left(\frac{x^3}{3}\cos y - 2\right)\, dy = -4\int\int_D y\, dxdy = -4\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\, dy\right)\, dx = -\frac{8}{3}.$$

2. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je $r^2 + r = 0$, tj. $r(r+1) = 0$. Njena rešenja su 0 i -1, pa je opšte rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$. Opšte rešenje tražene nehomogene diferencijalne jednačine tražimo u obliku $y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$. Na osnovu metode varijacije proizvoljnih konstanata, rašavamo sistem

$$C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0, \quad -C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^{2x}}.$$

Drugu jednačinu rešimo po $C_2'(x)$ a zatim integralimo, dobićemo

$$C_2(x) = -\arctan e^x + B,$$

gde je B proizvoljna konstanta.

Kako je

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^{2x}},$$

integracijom dobijamo

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{(1+e^{2x}) - e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx = x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + A,$$

gde je A proizvoljna konstanta.

Opšte rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$y = A + Be^{-x} + x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} - e^{-x}\arctan e^x.$$

3. Poluprečnik date kugle je $R = 1$. Ako za izračunavanje zadatog integrala koristimo sferne koordinate

$$x = \rho\cos\phi\sin\psi, \quad x = \rho\sin\phi\sin\psi, \quad z = \rho\cos\psi,$$

gde $\phi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, \pi]$, i, pošto ln nije definisan u nuli, $\rho \in [\varepsilon, R]$, gde je $(R >)\ \varepsilon > 0$.

Sada je

$$J = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\psi \left[\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{R} \rho^4 \ln \rho \, d\rho \right] = \frac{8\pi R^5}{15} \left(\ln R - \frac{1}{5} \right).$$

Poslednji integral može da se reši parcijalnom integracijom, stavljanjem $u = \ln \rho$, $dv = \rho^4 \, d\rho$. Konačno, za $R = 1$, dobijamo $J = -8\pi/75$.

4. Koriste se formule za rotor i divergenciju vektorskog polja. Dobija se $rot\,\vec{v} = 0$ i $div\,\vec{v} = 6xy \neq 0$, kad god je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Dakle, polje je potencijalno.

Rešenja zadataka (Grupa 2.)

1. $I = \frac{8}{3}$, zbog suprotne orijentacije, u odnosu na isti zadatak 1. grupe.

2. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je $r^2 - r = 0$, tj. $r(r-1) = 0$. Njena rešenja su 0 i 1, pa je opšte rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1 + C_2 e^x$. Opšte rešenje tražene nehomogene diferencijalne jednačine tražimo u obliku $y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^x$. Na osnovu metode varijacije proizvoljnih konstanata, rašavamo sistem

$$C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0, \quad C_2'(x)e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

Drugu jednačinu podelimo sa e^x a zatim integralimo, dobićemo

$$C_2(x) = x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + B,$$

gde je B proizvoljna konstanta.

Kako je

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^x = -\frac{e^x}{1 + e^{2x}},$$

integracijom dobijamo

$$C_1(x) = -\arctan e^x + A,$$

gde je A proizvoljna konstanta.

Opšte rešenje zadate diferencijalne jednačine je

$$y = A + Be^x + e^x(x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}) - \arctan e^x.$$

3. Radi se isto kao 3. zadatak prve grupe, samo je ovde $R = e$, dakle $J = 32\pi e^5/75$.

4. Koriste se formule za rotor i divergenciju vektorskog polja. Dobija se $rot\,\vec{v} = 0$ i $div\,\vec{v} = 12x^2y \neq 0$, kad god je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Dakle, polje je potencijalno.