Diferencijalne jednačine višeg reda (dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Kreirati diferencijalnu jednačinu čije je opšte rešenje a) $y = C_1 \sin x + C_2 x$; b) $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x$. Studentima se savetuje da za vežbu obavezno pokušaju da reše ove primere i u obrnutom - standardnom smeru (tj. da direktno reše jednačine koje se dobiju kao odgovor).

2. Naći opšte rešenje jednačine
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$.

4. Rešiti sistem
$$\frac{dx}{dt} = y + 2e^t, \quad \frac{dy}{dt} = x + t^2.$$

5. Naći opšte rešenje jednačine $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin(x)\cos(2x)$.

Uputstva i konačni odgovori

1. a) $y''\,(x \cot x - 1) + xy' - y = 0$; b) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$.

2. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je
$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x.$$
Potražimo opšte rešenje date jednačine u obliku
$$y = [C_1(x) + C_2(x)x]e^x.$$
Rešavanjem sistema dobijamo
$$C_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}},$$
a integracijom dobijenih jednačina
$$C_1(x) = A_1 + \sqrt{4 - x^2}, \quad C_2(x) = A_2 + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$
Traženo opšte rešenje je:
$$y = (A_1 + A_2 x)e^x + \left(\sqrt{4 - x^2} + x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^x.$$

3. Jednačina nakon što je podelimo sa x postaje Ojlerova. Ako uvedemo smenu $x = e^t$, dobijamo:

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 6te^{-t}.$$

Opšte rešenje homogenog dela dobijene jednačine je

$$y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Pošto je broj -1 koren karakteristične jednačine partikularno rešenje ćemo tražiti u obliku:

$$y_p = t(A_1 t + A_2)e^{-t}.$$

Dobijamo $A_1 = -1,\ A_2 = -\dfrac{2}{3}$. Opšte rešenje polazne Ojlerove jednačine je:

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{3x}\left(3\ln^2 x + 2\ln x\right).$$

4. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2,\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t.$

5. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x).$$

Zadatu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)),$$

a zatim tražiti partikularna rešenja jednačina

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = \frac{1}{2}\sin(3x),$$
$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = -\frac{1}{2}\sin(x),$$

Pošto broj $3i$ nije koren karakteristične jednačine, partikularno rešenje prve jednačine tražimo u obliku

$$y_{p_1} = A_1 \cos(3x) + A_2 \sin(3x).$$

i nalazimo $A_1 = 0,\ A_2 = \dfrac{1}{80}$. Traženo partikularno rešenje je:

$$y_{p_1} = \frac{1}{80}\sin(3x).$$

Pošto je broj i prost koren karakteristične jednačine, partikularno rešenje druge jednačine tražimo u obliku

$$y_{p_2} = x(M\cos(2x) + N\sin(2x)).$$

i nalazimo $M = \dfrac{1}{12}$, $N = 0$. Traženo partikularno rešenje druge jednačine je:

$$y_{p_2} = \frac{x}{12}\cos(x).$$

Partikularno rešenje polazne jednačine je

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{80}\,\sin(3x) + \frac{x}{12}\cos(x)$$

dok je njeno opšte rešenje

$$y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x) + \frac{1}{80}\,\sin(3x) + \frac{x}{12}\cos(x).$$

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu