Zadaci (tačka, prava, ravan)

1. Napisati jednačinu ravni α kojoj pripada prava:

$$p_1 : \frac{x+2}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

i paralelna je pravoj

$$p_2 : x - 2y + 1 = 0 \quad 3x - 2z - 3 = 0$$

2. (Ispit - januar 2015.) Date su ravan α: $5x - y - 2z = 2$, tačka $S(0-2,1)$ i prava p koja sadrži tačku $(1,2,-1)$ i paralelna je vektoru $(0,-3,2)$. a) Odrediti rastojanje izmedju tačke S i preseka prave p i ravni α.

   b) Ako tačka S ne pripada pravoj p, odrediti jednačinu ravni β odredjene tačkom S i pravom p, a zatim presek ravni α i β.

Rešenja

1. Vektor pravca prave p_2 je kolinearan sa vektorom

$$\vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = (2,1,3)$$

   Uočimo bilo koju tačku sa prave p_1, na primer $M_0(-2,0,1)$. Tačka mora pripadati ravni α. Kako je vektor normale na ravan α

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

   to njena je jednačina glasi

$$-4(x+2) + 2y + 2(z-1) = 0. \ -4x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

2. Prava određena tačkom $P\,(1,2,-1)$ i vektorom $\vec{p} = (0,-3,2)$ odnosno $\Pi = \langle P, \vec{p} \rangle$ ima parametarski oblik:

$$\begin{array}{rcll} x & = & 1 & \\ y & = & 2 & -3t \\ z & = & -1 & +2t \end{array}$$

   a)

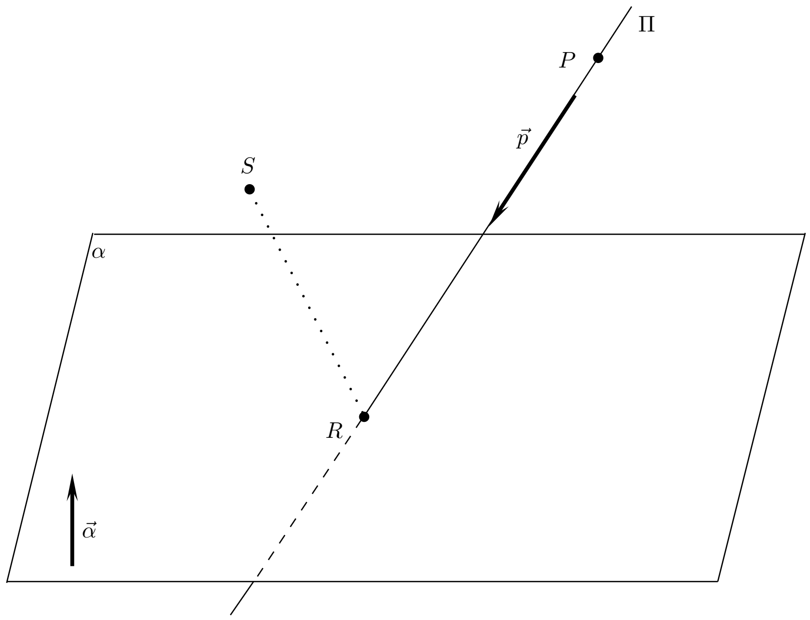
   Kako je vektor normale date ravni $\vec{\alpha} = (5,-1,-2)$, iz $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -1 \neq 0$, zaključujemo da postoji presek:

$$\alpha \cap \Pi = \{R\} \Rightarrow 5\,(1) - (2 - 3t) - 2\,(-1 + 2t) = 2 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow R\,(1, -7, 5)$$

Rastojanje se nalazi poznatom formulom:

$$SR = \sqrt{(1-0)^2 + (-7+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{42}$$

Slika koja sledi pokazuje odnos između tačaka i ravni, uz napomenu da tačka S ne pripada ravni α što se vidi unošenjem koordinata tačke S u jednačinu ravni α.



Slika 1: Rastojanje između tačaka R i S.

b) Tačka S ne pripada pravoj p, jer joj prva koordinata nije 0. Jednačinu ravni β jednostavno dobijamo jer $\beta = \langle S, \vec{\beta} \rangle$, gde je $\vec{\beta} = \vec{p} \times \overrightarrow{SR}$. Kako je $\overrightarrow{SR} = (1, -5, 4)$ sledi:

$$\vec{\beta} = \vec{p} \times \overrightarrow{SR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (-2, 2, 3)$$

Jednačina ravni β jednaka je:

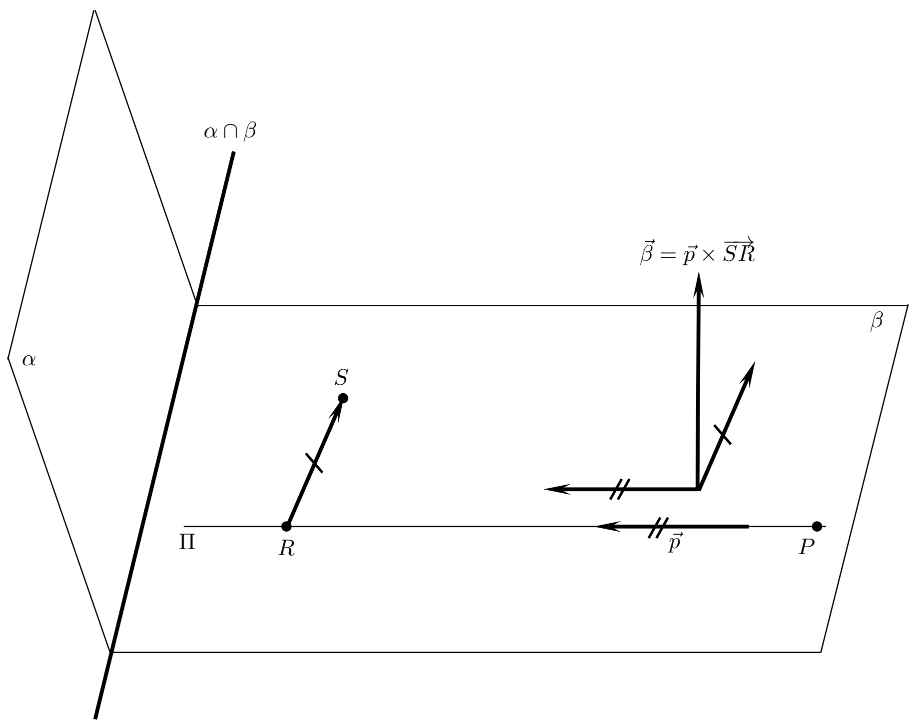
$$-2\,(x-0) + 2\,(y+2) + 3\,(z-1) = 0 \Rightarrow -2x + 2y + 3z + 1 = 0$$

Ravni α i β se seku jer im vektori nisu kolinearni.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & \boxed{y} & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \end{array} \;\Big]\,{}^{2}_{+} \Rightarrow 8x - z = 3$$

Ako je $x = t$ sledi da je $z = -3 + 8t$ i $y = 4 - 11t$, odnosno presečna prava ima jednačinu:

$$\begin{array}{rcrr} x & = & & t \\ y & = & 4 & -11t \\ z & = & -3 & +8t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{-11} = \frac{z+3}{8}$$



Slika 2: Presečna prava je dobijena rešavanjem sistema čije su jednačine jednačine ravni α i β.

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu