Zadaci (sistemi linearnih jednačina sa parametrom)

1. (Ispit - januar 2015.) U zavisnosti od $k \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 1 \\ x + (k-1)y &= 4 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

2. (Ispit - oktobar 2014.) U zavisnosti od $a \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (2a-1)\,x & + & y & - & az & = & 1-a \\ (a+1)\,x & - & ay & + & (3a+1)\,z & = & a+2 \\ x & & & + & az & = & 3-2a \end{array}$$

3. (Ispit - septembar 2014.) U zavisnosti od $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & -\lambda \\ 3x & + & 3y & + & (\lambda-1)\,z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \end{array}$$

Rešenja

1. Sistem najlakše rešavamo najobičnijom eliminacijom: ako iz prve jednačine izrazimo

$$y = \frac{1-kx}{3}$$

i to uvrstimo u drugu, imamo

$$x + (k-1)\frac{1-kx}{3} = 4, \quad \left(3+k-k^2\right)x = 13-k, \quad x = \frac{13-k}{3+k-k^2}$$

(usput je neophodno prokomentarisati kako ova jednačina po x nema rešenja za $3+k-k^2 = 0$, odnosno $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ s obzirom na to da je tada $13-k \neq 0$) i onda

$$y = \frac{1-kx}{3} = \frac{3-12k}{3\,(3+k-k^2)} = \frac{1-4k}{3+k-k^2}$$

Dati sistem se sastoji od 3 jednačine u 2 nepoznate, tj. ima više jednačina nego nepoznatih. Kako je sistem od 2 nepoznate u opštem slučaju odredjen dvema jednačina, sistem poput ovog može biti salglasan samo ako treća jednačina uklapa prve dve, tj. ako je vrednost k takva da se dobijena rešenja po x i y ukpalaju u 3. jednačinu:

$$
\begin{aligned}
&2\frac{13-k}{3+k-k^2}-\frac{1-4k}{3+k-k^2}=5\\
&\frac{25+2k}{3+k-k^2}=5,\quad 5k^2-3k+10=0.
\end{aligned}
$$

Dobijena kvadratna jednačina po k nema rešenja ($D=3^2-4\cdot 5\cdot 10<0$), dakle realan parametar k sa traženim svojstvom ne postoji.

2. **Prvi način:**

Sistem rešimo koristeći Gausov postupak. Izborom prvog markera

$$
\begin{array}{rcccrcrl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a & {\scriptstyle a}\\
(a+1)\,x & - & ay & + & (3a+1)\,z & = & a+2 & {\scriptstyle +}\\
x & & & + & az & = & 3-2a &
\end{array}
$$

dobijamo sledeći ekvivalentni sistem:

$$
\begin{array}{rcccrcrl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a & \\
(2a^2+1)\,x & & & + & (-a^2+3a+1)\,z & = & -a^2+2a+2 & {\scriptstyle +}\\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a & {\scriptstyle -(2a^2+1)}
\end{array}
$$

Izborom drugog markera dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$
\begin{array}{rcccrcr}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a\\
 & & & & (-2a^3-a^2+2a+1)\,z & = & 4a^3-7a^2+4a-1\\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a
\end{array}
\tag{1}
$$

Sledi da je:

$$z=\frac{4a^3-7a^2+4a-1}{-2a^3-a^2+2a+1}\Rightarrow z=\frac{(a-1)\,(4a^2-3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{2}$$

Slično je:

$$x=(3-2a)-az\Rightarrow x=\frac{(a-1)\,(a-3)\,(3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{3}$$

i

$$y=1-a+az-(2a-1)\,x\Rightarrow y=\frac{(a-1)\,(17a^2-3a-4)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{4}$$

Konačno ako $a\notin\left\{-1,-\frac{1}{2},1\right\}$ sistem ima jedinstveno rešenje. Koristeći mogućnost skraćivanja podizraza $(1-a)$ u (2), (3), (4) rešenje možemo napisati:

$$\mathcal{R}=\left\{\left(\frac{(3-a)(3a+1)}{(2a+1)(1+a)},\frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(1+a)},\frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(1+a)}\right)\middle|a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2},1\right\}\right\}$$

Ukoliko je $a\in\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$ sistem (1) je protivurečan jer je slobodni član njegove druge jednačine različit od nule. Sledi:

$$\mathcal{R}=\emptyset \text{ za } a\in\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$$

Ukoliko je $a=1$ sistem (1) postaje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \boxed{y} & - & z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0 \\ \boxed{x} & & & + & z & = & 1 \end{array} \tag{5}$$

Ako je $z=\alpha\in\mathbb{R}$ tada je $x=1-\alpha$ i $y=2\alpha-1$ odakle je:

$$\mathcal{R}=\left\{(1-\alpha,2\alpha-1,\alpha)\middle|a=1,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

Drugi način:

Ukoliko dati sistem rešavamo uz pomoć Kramerovog pravila, dobijamo da su odgovarajuće determinante jednake

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & -a \\ a+1 & -a & 3a+1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a^3-a^2+2a+1, \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & -a \\ a+2 & -a & 3a+1 \\ 3-2a & 0 & a \end{vmatrix} = 3a^3-11a^2+5a+3, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1-a & -a \\ a+1 & a+2 & 3a+1 \\ 1 & 3-2a & a \end{vmatrix} = 17a^3-20a^2-a+4, \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & 1-a \\ a+1 & -a & a+2 \\ 1 & 0 & 3-2a \end{vmatrix} = 4a^3-7a^2+4a-1.
\end{aligned}$$

Glavna determinanta Δ je očito jednaka 0 za $a=1$ (kao i sve ostale), te se pri njenoj faktorizaciji može izvući $(a-1)$. Nalazimo $\Delta=(a-1)\left(-2a^2-3a-1\right)=(1-a)\left(2a^2+3a+1\right)$.

Izraz u drugoj zagradi je jednak 0 za $a = -1$, tako da se dalje može izvući $(a+1)$. Konačno,

$$\Delta = (1-a)(a+1)(2a+1).$$

FAKTORIZACIJU OSTALIH DETERMINANTI NEMA POTREBE SPROVODITI NA OVAJ NAČIN (mole se studenti da ovo zapamte za ubuduće), jedino što nam je bitno jeste da li je neka od njih deljiva sa $a-1$, $a+1$ ili $2a+1 = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)$ (tj. da li je jednaka 0 za $a \in \{1, -1, -\frac{1}{2}\}$) - nije osim što su sve tri deljive sa $(a-1)$. Stoga odmah zaključujemo da u slučajevima $a = -1$ i $a = -\frac{1}{2}$ sistem nema rešenja (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0 - zna se da sistem nema rešenja; u ovim slučajevima su čak sve tri različite od 0). Za $a = 1$ su sve četiri determinate jednake 0 i tu se diskusija mora sprovesti Gausovom metodom eliminacije, što je već uradjeno u prvom rešenju. Za $a \neq \pm 1, -\frac{1}{2}$ opet dobijamo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{-3a^2+8a+3}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(a+1)}\right).$$

Dakle, čak i kada se zadatak radi Kramerovim pravilom, ne može se u potpunosti izbeći Gausov metod eliminacije. Naredni zadatak se ne može rešiti Kramerovom metodom, jer sistem nema jednak broj jednačina i nepoznatih. Stoga je neophodno dobro znati Gausov metod eliminacije

3. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Primenimo sledeće elementarne transformacije, da bi našli $\rho\left(\Sigma\right)$.

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 6 & \lambda-7 & 0 & 10 \\ \lambda+2 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-\lambda+18\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ukoliko je $\lambda = 1$ tada je sistem oblika:

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}
$$

odakle sledi da je sistem protivurečan odnosno $\mathcal{R}\left(\Sigma\right) = \emptyset$.

Ako je $\lambda \neq 1$ tada je sistem oblika:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-\lambda+18\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-7\lambda+6\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sledi da je $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$ za $\lambda \notin \{1, 6\}$. Ukoliko je $\lambda = 6$ sistem je oblika:

$$\Sigma \quad = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i ima jedinstveno rešenje $\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{36}{5} \right) \middle| \lambda = 6 \right\}$.

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu