Konvergencija redova
(dodatak predavanjima i vežbama)

Zadaci

1. Ispitati konvergenciju reda

   a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$;

   b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$;

   c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+m)}$,

   gde je m dati prirodan broj i ukoliko konvergira, izračunati njegovu sumu.

2. Dokazati da redovi

   a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(\sqrt[3]{k}-2)(\sqrt[4]{k}+e)}$

   b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k k\sqrt{k}}{k^2-5k-\pi}$

   konvergiraju u običnom, ali ne i u apsolutnom smislu.

Uputstva i konačni odgovori

1. Iskoristiti razlaganje

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   i uopšte

$$\frac{1}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\frac{(k+m)-k}{k(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right)$$

   Odgovori a) 1; b) 3/4; c) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}}{m}$.

2. Iskoristiti da su dati redovi, što se apsolutne konvergencije tiče, ekvikonvergentni sa redovima čiji su opšti sabirci $\dfrac{1}{k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{k^{\frac{7}{12}}}$, odnosno $\dfrac{k\sqrt{k}}{k^2} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, za koje je poznato da diveriraju.

   Što se obične konvergencije tiče, nju dokazujemo Lajbnicovim kriterijumom na standardan način (u delu pod b) treba se treba uveriti da je funkcija $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x-\pi}$ opadajuća za x počev od neke pozitivne realne vrednosti a i da teži nuli kad x teži $+\infty$).

Lajbnicov kriterijum nam je neophodan za one naizmenične redove koji ne konvergiraju apsolutno, npr. da smo pod b) imali red $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k^2-5k-\pi}$, on bi na planu apsolutne konvergencije bio ekvikonvergentan sa redom $\frac{1}{k\sqrt{k}}$, što bi značilo da konvergira aposlutno, a samim tim i u običnom smislu.

Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu