Конвергенција низова

Дефиниција 1. За дати низ $a_1, a_2, \dots$, кажемо да *конвергира* уколико постоји реалан број a такав да се **за свако** $\varepsilon > 0$ (ма колико "мало" било, тј. ма колико било "близу" 0) **сви** чланови датог низа почев од неког налазе у интервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, тј. ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такав да за све $n > n_0$ важи $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ($|a_n - a| < \varepsilon$). Тада кажемо и да *лимес* или *гранична вредност* низа a_n једнак a или да a_n *тежи* a, што се записује као

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

Уколико низ не конвергира, кажемо да *дивергира*.

Дефиниција 2. За дати низ $a_1, a_2, \dots$ кажемо да *тежи позитивној бесконачности* ($+\infty$) уколико су **за свако** $M > 0$ (ма колико "велико" било, тј. ма колико било "далеко" од 0) **сви** чланови датог низа почев од неког већи од M, тј. ако за свако $M > 0$ постоји индекс $n_0 = n_0(M)$ такав да за све $n > n_0$ важи $a_n > M$ и то записујемо као

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Слично, за дати низ $a_1, a_2, \dots$ кажемо да *тежи негативној бесконачности* ($-\infty$) уколико су **за свако** $M < 0$ (ма колико $|M|$ било "велико") **сви** чланови датог низа почев од неког мањи од M, тј. ако за свако $M < 0$ постоји индекс $n_0 = n_0(M)$ такав да за све $n > n_0$ важи $a_n < M$ и то записујемо као

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Пример 1. Низ дат са $a_n = \dfrac{1}{n}$ тежи 0 јер за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да за све $n > n_0$ важи $a_n < \varepsilon$: за дато $\varepsilon > 0$ ће важити $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ кад је $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, што значи да за одговарајуће $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можемо узети први природан број већи од $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Нпр. за $\varepsilon = .001$ можемо узети $n_0 = 1001$, за $\varepsilon = .0005$ можемо узету $n_0 = 2001$ итд. Уопште, за свако $a > 0$ важи $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$. Наиме, да би за дато $\varepsilon > 0$ било $\dfrac{1}{n^a} < \varepsilon$, треба да важи

$$n^a > \frac{1}{\varepsilon},\ n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Дакле, за одговарајуће $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можемо узети први природан број већи од $\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$.

Из последњег директно произилази да за свако $a > 0$ важи да n^a тежи $+\infty$, што можемо објединити следећим записом

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 0. \end{cases}$$

Познато је да сваки низ може имати највише један лимес. Може, наравно, и да нема лимес. Нпр. низ задат са $a_n = (-1)^n$ нема лимес. Јесте да има бесконачно много чланова једнаких 1, али не може се рећи су СВИ чланови почев од неког близу броју 1 онолико колико хоћемо (исто је и за -1).

Пример 2. За свако $q > 1$ важи $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, јер да би за дато $M > 0$ било $q^n > M$ - треба да важи $n > \log_q M$ (на основу особина логаритма за основу већу од 1). Слично, за свако $q \in (-1, 1)$ важи $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ јер да би за дато ε било $|q|^n < \varepsilon$ ($q^n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ - остављамо могућност да q^n буде негативно јер ће се то догађати за $q \in (-1, 0)$ кад је n непарно)- треба да важи $n > \log_{|q|} \varepsilon$ (на основу особина логаритма за основу из интервала $(0, 1)$). Када је $q < -1$, низ $a_n = q^n$ нема лимес (коначан је јасно да нема, а нема ни бесконачан осим што чланови са парним индексима теже $+\infty$ и чланови са непарним индексима теже $-\infty$). Дакле,

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ 1, & q = 1, \\ 0, & q \in (-1, 1), \\ \text{не постоји}, & q \le -1. \end{cases}$$

Јасно је да низ који тежи $+\infty$ или $-\infty$ дивергира, док обрнуто не мора да важи (поменути низ $a_n = (-1)^n$ је већ контрапример).

Сва правила за рачунање лимеса функција (у општем случају реалног) аргумента x кад $x \to +\infty$ се могу примењивати и на низове кад природан n тежи $+\infty$. Такође, уколико у случају кад природан број n тежи $+\infty$ заменимо $x = \dfrac{1}{n}$, имамо $x \to 0+$ и тада можемо примењивати сва правила за рачунање лимеса функција реалног аргумента x кад x тежи 0 с десне стране.

Пример 3. За произвољне константе $a, b, c, d,\ a, c \neq 0$, важи

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a + \dfrac{b}{n}}{c + \dfrac{d}{n}} = \frac{a + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b}{n}}{c + \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d}{n}} = \frac{a}{c}.$$

Уопште, за било које природне бројеве k, l и реалне бројеве $p_0, p_1, \ldots, p_k$, $q_0, q_1, \ldots, q_l$, $p_k, q_l \neq 0$, важи

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_k\, n^k + \ldots + p_1\, n + p_0}{q_l\, n^l + \ldots + q_1\, n + q_0} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{q_l}, & k = l, \\ 0, & k < l, \\ +\infty, & k > l \text{ и } \dfrac{p_k}{q_l} > 0, \\ -\infty, & k > l \text{ и } \dfrac{p_k}{q_l} < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Познат је тзв. *Кошијев критеријум конвергенције низова* који наводимо у следећој теореми.

Теорема 1. **(Кошијев критеријум конвергенције низова)** Потребан и довољан услов да би низ $a_1, a_2, \ldots$ конвергирао (некој коначној вредности) јесте да за свако $\varepsilon > 0$ (ма колико било "мало") постоји индекс $n_0 = n_0(\varepsilon)$ тако да за све $m, n > n_0$, $m > n$, важи $|a_m - a_n| < \varepsilon$ (или, еквивалентно, ако постоји индекс $n_0 = n_0(\varepsilon)$ тако да за све $n > n_0$, важи $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ за све природне бројеве p).

Александар Пејчев