Основни појмови слагања кретања крутог тела

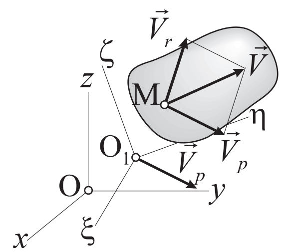
Кретање тела у односу на условно непокретни систем референције одређује његово *апсолутно кретање*. *Релативно кретање* крутог тела представља његово кретање у односу на покретни координатни систем, док је *преносно кретање* крутог тела последица кретања покретног координатног система у односу на условно непокретни.

Слагање транслаторних кретања крутог тела

$$\overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{V}_1. \tag{1}$$

$$\overrightarrow{V}_p = \overrightarrow{V}_2. \tag{2}$$

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_p + \overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2, \tag{3}$$



Слика 1

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 + \ldots + \overrightarrow{V}_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V}_i, \tag{4}$$

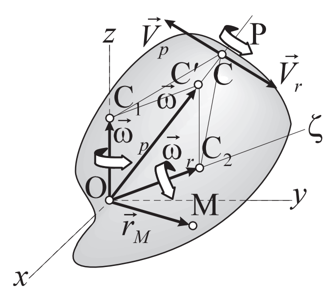
Слагање обртних кретања крутог тела

Слагање обртања крутог тела око оса које се секу

$$\overrightarrow{V}_C = \overrightarrow{V}_p + \overrightarrow{V}_r = \vec{\omega}_p \times \vec{r}_C + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_C, \tag{5}$$

при чему су преносна брзина $\overrightarrow{V}_p = \vec{\omega}_p \times \vec{r}_C$ и релативна брзина $\overrightarrow{V}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}_C$ тачке C.

$$\vec{\omega}_p \times \vec{r}_C + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_C = 0. \tag{6}$$



Слика 2

$$V_p = |\vec{\omega}_p \times \vec{r}_C| \quad \text{и} \quad V_r = |\vec{\omega}_r \times \vec{r}_C|, \tag{7}$$

$$\overrightarrow{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{V}_M = \vec{\omega}_p \times \vec{r}_M + \vec{\omega}_r \times \vec{r}_M = (\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r) \times \vec{r}_M. \tag{9}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \tag{10}$$

Теорема 1 *Резултат слагања два истовремена обртања крутог тела око оса које се секу је апсолутно кретање представљено обртањем око тренутне осе ротације која пролази кроз пресечну тачку оса преносног и релативног обртања; вектор апсолутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне и релативне угаоне брзине.*

$$\vec{\omega} \,=\, \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n \,=\, \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i. \tag{11}$$

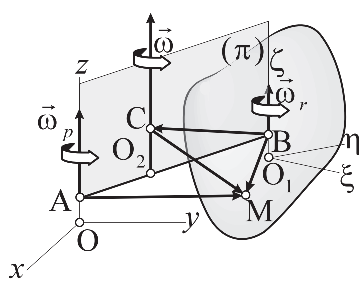
Слагање обртања крутог тела око паралелних оса

Случај

$$\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r \,=\, 0 \tag{12}$$

ће бити искључен.

Теорема 2 *Синтеза два тренутна обртања крутог тела око паралелних оса своди се на обртање око тренутне осе ротације, паралелне осама преносног и релативног обртања. Тренутна оса ротације припада равни вектора преносне и релативне угаоне брзине и дели растојање између поменутих оса у односу, обрнуто пропорционалном односу интензитета угаоних брзина. Вектор тренутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне и релативне угаоне брзине.*



Слика 3

$$\overrightarrow{V}_M \,=\, \overrightarrow{V}_p + \overrightarrow{V}_r \,=\, \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{BM}, \tag{13}$$

$$\overrightarrow{V}_p \,=\, \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AM} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{V}_r \,=\, \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{BM}, \tag{14}$$

$$\overrightarrow{V}_M \,=\, (\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r) \times \overrightarrow{BM} + \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AB}. \tag{15}$$

$$\overrightarrow{V}_C \,=\, (\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r) \times \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AB} \,=\, 0, \tag{16}$$

$$\overrightarrow{V}_M \,=\, (\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r) \times (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}) \,=\, (\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r) \times \overrightarrow{CM}, \tag{17}$$

$$\vec{\omega} \,=\, \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r. \tag{18}$$

$$\overrightarrow{AO_2} \,=\, m\overrightarrow{AB} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BO_2} \,=\, n\overrightarrow{AB}, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{V_{O_2}} = \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AO_2} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{BO_2} = (m\vec{\omega}_p + n\vec{\omega}_r) \times \overrightarrow{AB} = 0, \tag{20}$$

$$\vec{\omega}_p = \omega_{pe}\vec{e} \qquad \text{и} \qquad \vec{\omega}_r = \omega_{re}\vec{e}, \tag{21}$$

$$(m\omega_{pe} + n\omega_{re})\vec{e} \times \overrightarrow{AB} = 0, \tag{22}$$

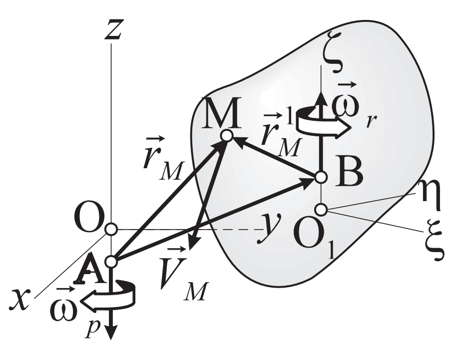
$$m\omega_{pe} + n\omega_{re} = 0, \quad \text{односно} \qquad \frac{\omega_{re}}{\omega_{pe}} = -\frac{m}{n}. \tag{23}$$

$$\frac{\overline{AO_2}}{\overline{O_2B}} = \frac{\omega_r}{\omega_p}, \tag{24}$$

$$\vec{r}_{BC} = \overrightarrow{BO_2} + \overrightarrow{O_2C} = n\overrightarrow{AB} + p\vec{e}, \tag{25}$$

$$\vec{r}_{BC} = p\vec{e} - \overrightarrow{AB}\frac{\omega_{pe}}{\omega_{pe} + \omega_{re}}, \tag{26}$$

Кинематички спрег



Слика 4

Када је $\vec{\omega}_p + \vec{\omega}_r = 0$:

$$\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega}_p \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{BA}, \tag{27}$$

Теорема 3 *Кинематички спрег еквивалентан је тренутној транслацији крутог тела.*

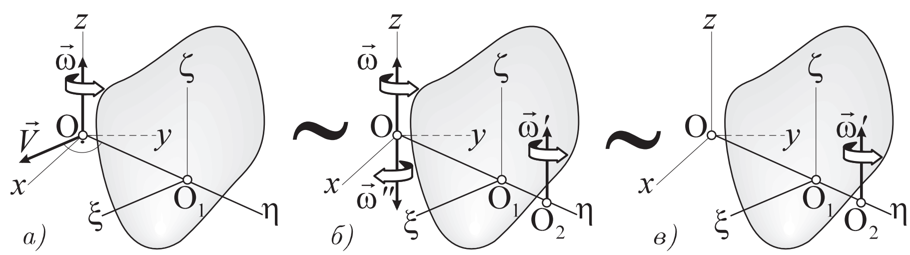
$$\overrightarrow{V} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \tag{27'}$$

$$V = \omega \overline{AB} \sin(\widehat{\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}}) = \omega h, \tag{28}$$

а величина $h = \overline{AB} \sin(\widehat{\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}})$ представља *крак кинематичког спрега* $[\vec{\omega}_p; \vec{\omega}_r]$.

Слагање транслаторних и обртних кретања крутог тела

Брзина транслаторног кретања управна на вектор угаоне брзине



Слика 5

$$\overrightarrow{V} = \vec{\omega}' \times \overrightarrow{O_2O} \tag{29}$$

$$\vec{\omega}' \times \overrightarrow{V} = \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \overrightarrow{O_2O}) = \vec{\omega}'(\vec{\omega}' \cdot \overrightarrow{O_2O}) - \overrightarrow{O_2O}\omega^2, \tag{30}$$

$$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \times \overrightarrow{V}), \tag{31}$$

Став 1 *Синтеза транслаторног и обртног кретања крутог тела, при чему су вектор брзине транслаторног кретања* $\overrightarrow{V}$ *и вектор тренутне угаоне брзине* $\vec{\omega}$ *око осе* Oz *међусобно ортогонални, своди се на тренутну ротацију крутог тела угаоном брзином* $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ *око осе паралелне оси* Oz *која пролази кроз тачку* O_2 *чији је вектор положаја одређен једначином* (31).

Брзина транслаторног кретања колинеарна вектору угаоне брзине

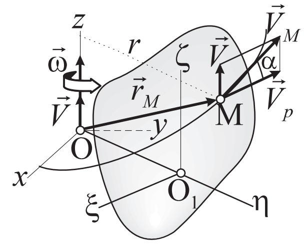
$$\vec{V}_M = \vec{V}_p + \vec{V}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}_M + \vec{V}, \tag{32}$$

$$\vec{V}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_M \qquad \text{и} \qquad \vec{V}_r = \vec{V}, \tag{33}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_r}{V_p} = \frac{V}{\omega r}. \tag{34}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{35}$$

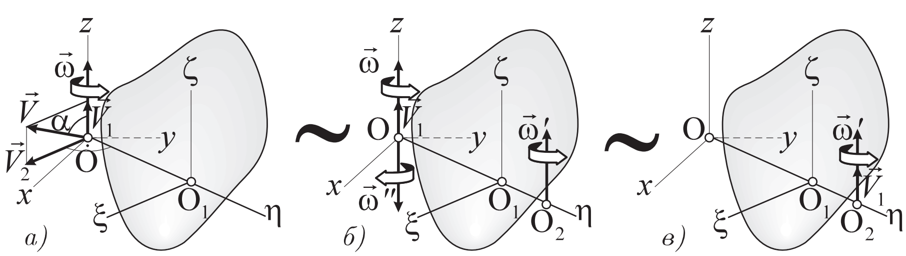
$$h = VT = \frac{2\pi V}{\omega}, \tag{36}$$



Слика 6

$$h = 2\pi p. \tag{37}$$

Брзина транслаторног кретања заклапа произвољни угао са вектором угаоне брзине



Слика 7

$$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{\omega^2}(\vec{\omega} \times \vec{V}_2). \tag{38}$$

$$(\vec{V}_1, \vec{\omega}, \vec{\omega}', \vec{\omega}'') \sim (\vec{V}_1, \vec{\omega}'). \tag{39}$$

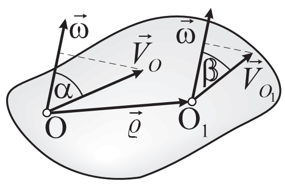
Став 2 *Синтеза транслаторног и обртног кретања крутог тела, при чему вектор брзине транслаторног кретања* $\vec{V}$ *и вектор тренутне угаоне брзине* $\vec{\omega}$ *око осе* Oz *заклапају произвољни угао* $\alpha \neq \pi/2$*, своди се на тренутно завојно кретање крутог тела угаоном брзином* $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ *око тренутне завојне осе која пролази кроз тачку* O_2 *чији је вектор положаја одређен једначином* (38)*; параметар завртња* $p = V\cos\alpha/\omega$.

Општи случај слагања кретања крутог тела

Теорема 4 *Свако сложено кретање крутог тела своди се на тренутно транслаторно кретање крутог тела брзином једнакој брзини произвољно изабраног пола и тренутно обртање крутог тела око осе која пролази кроз тај, произвољно изабрани пол.*

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i, \tag{40}$$

$$\overrightarrow{V}_O = \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{V}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{\omega}_i, \tag{41}$$



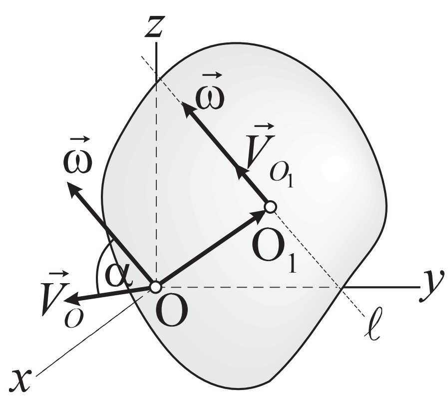
Слика 8

$$\vec{I}_1 = \vec{\omega}. \tag{42}$$

$$\overrightarrow{V}_{O_1} = \overrightarrow{V}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1}. \tag{43}$$

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{V}_{O_1} = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{V}_O + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1}) = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{V}_O, \tag{44}$$

$$V_O \cos\alpha = V_{O_1} \cos\beta = I_2, \tag{45}$$



Слика 9

$$\overrightarrow{V}_{O_1} = p\vec{\omega}, \tag{46}$$

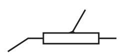
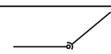
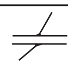
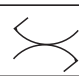
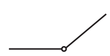
$$\overrightarrow{V}_{O_1} = \overrightarrow{V}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1} = p\vec{\omega} \quad \text{за} \quad p \neq 0, \tag{47}$$

$$\frac{\dot{x}_O + (\omega_y z - \omega_z y)}{\omega_x} = \frac{\dot{y}_O + (\omega_z x - \omega_x z)}{\omega_y} = \frac{\dot{z}_O + (\omega_x y - \omega_y x)}{\omega_z} = p, \qquad (48)$$

$$p = \frac{\overrightarrow{V_O} \cdot \vec{\omega}}{\omega^2}. \qquad (49)$$

Увод у кинематику општег кретања система крутих тела

Кинематски парови

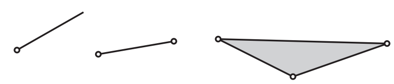
Име пара	Графички симбол	Степен слободе	Класа
Обртни		*1*	*5*
Призматични		*1*	*5*
Хеликоидни		*1*	*5*
Цилиндрични		*2*	*4*
Сферични		*3*	*3*
Равни		*3*	*3*
Општи		*5*	*1*
Произвољни		*i*	*6 - i*

Слика 10 Кинематски парови

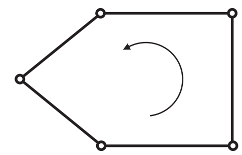
Кинематски ланци и системске групе

Произвољни систем крутих тела **(СКТ)**:

$$i = 6(n-1) - \sum_{j=1}^{5} j d_j \qquad (50)$$



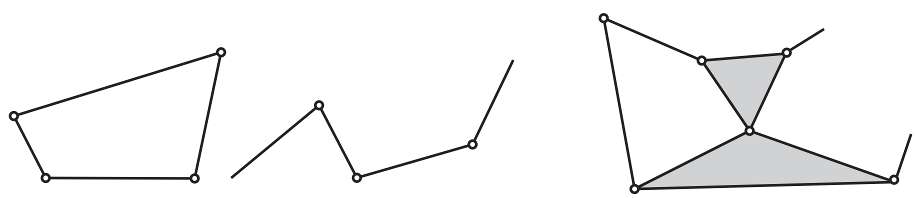
Слика 11 Унарни, бинарни и тернарни елементи



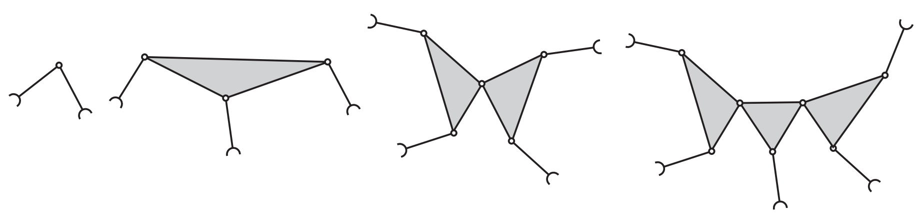
Слика 12 Кинематска петља

Равански систем крутих тела **(СКТ)**:

$$i = 3(n-1) - \sum_{j=1}^{2} j d_j \tag{51}$$



Слика 13 Кинематски ланци



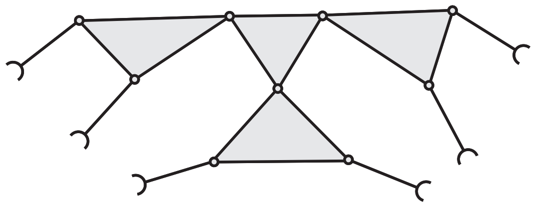
Слика 14 Групе

Равански системи:

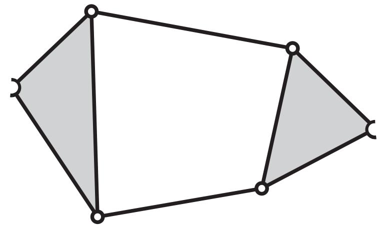
$$3m = \sum_{j=1}^{2} j d_j \tag{52}$$

Произвољни (просторни) системи:

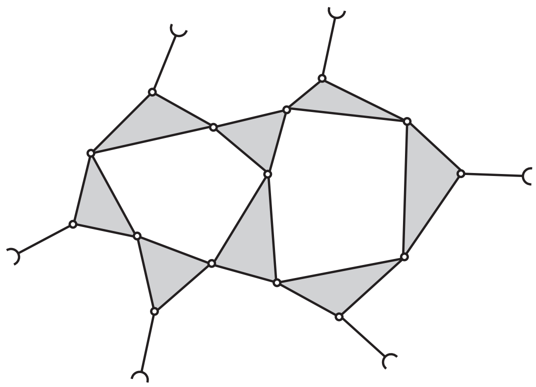
$$6m = \sum_{j=1}^{5} j d_j \tag{53}$$



Слика 15 Група класе 2



Слика 16 Група класе 3



Слика 17 Системска група класе 4

Механизми

Теорема 5 *Кинематски парови простог механизма са i степена слободе кретања имају i независних и 6 зависних координата.*

$$p = \sum_{j=1}^{5} (6-j) d_j \tag{54}$$

$$\begin{aligned} p - i &= \sum_{j=1}^{5} (6-j) d_j - \left[6(n-1) - \sum_{j=1}^{5} j d_j \right] = \\ &= 6 \sum_{j=1}^{5} d_j - 6n + 6 = 6. \end{aligned} \tag{55}$$

$$\sum_{j=1}^{5} d_j = n \tag{56}$$