rmutavdzic@mas.bg.ac.rs

Пример 1

1. Решити матричну једначину $M = X^{-1}N - 2E$, где је E јединична матрица и дате су матрице
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Дискусијом по реалном параметру a решити систем једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & (a-1)y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & az & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & a. \end{array}$$

3. Одредити раван π која садржи тачку $A(-3,0,3)$, сече раван $\alpha: x+z=1$ под углом од 30° и сече раван $\beta: -x+y+z=12$ под правим углом.

4. Свести криву другог реда $xy - 5x + 7y + 9 = 0$ на канонски облик.

Решења

1. Решење матричне једначине је $X = NA^{-1}$, где је
$$A = M + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -8 & -7 \\ 7 & -6 & -9 \\ -6 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

2. Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Рачунамо детерминанте
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 6a + 5 = (a+1)(a+5),$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -a+1 & 2 \\ 2 & -1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 + 7a + 9 = (a+1)(a^2 - 2a + 9),$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a + 1 = (a+1)(2a-1),$$
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 5a - 6 = (a+1)(a-6).$$

(1) Ако је $\Delta \neq 0$, тј. ако је $a \neq -1$ и $a \neq -5$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = \left(\frac{a^2-2a+9}{a+5}, \frac{2a-1}{a+5}, \frac{a-6}{a+5}\right)$.

(2) Ако је $a=-5$ систем нема решења.

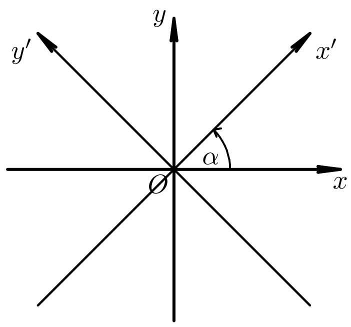
(3) Ако је $a=-1$ систем решавамо Гаусовим методом елиминације

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&2&1\\1&-1&1&2\\1&3&1&1\end{array}\right]\overset{V_2\leftrightarrow V_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&1&2\\2&2&2&1\\1&3&1&1\end{array}\right]\overset{\substack{V_2-2V_1\\V_3-V_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&1&2\\0&\boxed{4}&0&-3\\0&4&0&-3\end{array}\right]\overset{V_3-V_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&1&2\\0&\boxed{4}&0&-3\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Можемо узети да је променљива z слободна: $z=t, t\in\mathbb{R}$. Из друге једначине је $y=-\frac{3}{4}$, а из прве $x=\frac{5}{4}-t$. Дакле, систем је (једноструко) неодређен и његово решење је $(x,y,z)=\left(\frac{5}{4}-t,-\frac{3}{4},t\right), t\in\mathbb{R}$.

3. Нека су $\vec{n}_\alpha=(1,0,1)$, $\vec{n}_\beta=(-1,0,1)$ и $\vec{n}_\pi=(a,b,c)$ вектори нормала на равни α, β и π редом. Из услова задатка је $\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\beta=0$. Дакле, $\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-a+b+c=0$. Елимицијом параметра b из претходног система (за $c\neq 0$) добијамо једначину $2(a/c)^2-5(a/c)+2=0$, па је $a/c=2$ или $a/c=1/2$. Бирањем $c=1$ из првог решења добијамо $\vec{n}_\pi=(2,1,1)$, док бирањем $a=1$ из другог решења добијамо $\vec{n}_\pi=(1,-1,2)$. Дакле, раван π је дата једначином $2x+y+z+3=0$ или $x-y+2z-3=0$.

4. Општа једначина криве другог реда је $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, а угао ротације је $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}$. Овде је $A=C=0$ и $B=\frac{1}{2}$, па је $\mathrm{tg}2\alpha=\infty$ и можемо узети да је $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, тј. $\alpha=\frac{\pi}{4}$.



Формуле ротације су $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$ и $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, где је Oxy стари координатни систем, а $Ox'y'$ нови координатни систем (добијен ротацијом старог за угао α). Заменом формула ротације $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$ и $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$ у полазној једначини добијамо

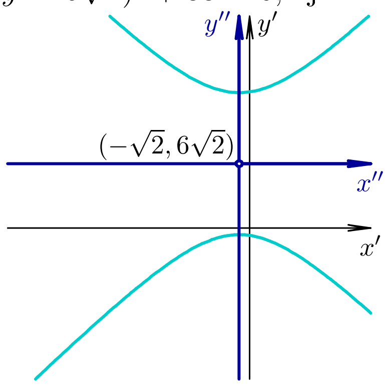
$$\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y')-\frac{5}{\sqrt{2}}(x'-y')+\frac{7}{\sqrt{2}}(x'+y')+9=0,$$

одакле је

$$x'^2+2\sqrt{2}x'-y'^2+12\sqrt{2}y'+18=0.$$

Ова једначина се може написати у облику $(x'+\sqrt{2})^2-(y'-6\sqrt{2})^2+88=0$, тј.

$$\frac{(y'-6\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$



Видимо да је дата крива хипербола са центром у тачки $(-\sqrt{2},6\sqrt{2})$ (у координатном систему $Ox'y'$) и да су формуле транслације $x''=x'+\sqrt{2}$ и $y''=y'-6\sqrt{2}$. Дакле, канонски облик је

$$\frac{y''^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{x''^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$

Одговарајуће трансформације координата су

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}-y''-6\sqrt{2}\right)=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}-7,$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}+y''+6\sqrt{2}\right)=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}+5.$$

Пример 2

Група А

1. Наћи матрицу X ако важи $BX^{-1} = 3X^{-1} + A$, где је $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Дату једначину можемо записати у облику $(B-3E)X^{-1} = A$, одакле множењем са X са десне стране добијамо $B - 3E = AX$. Множењем последње једначине са A^{-1} са леве стране следи $X = A^{-1}(B-3E)$. Налазимо да је $\det A = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B - 3E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Дискусијом по $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина $\begin{aligned} x + ay - z &= -1 \\ ax - y - 2z &= 1 \\ -2y - z &= 2a. \end{aligned}$

Дати систем се може решити помоћу Крамеровог правила. Потребне детерминанте су $\Delta = a^2 + 2a - 3 = (a-1)(a+3)$, $\Delta_x = -4a^2 - a + 5 = -(a-1)(4a+5)$, $\Delta_y = -2a^2 + 3a - 1 = -(a-1)(2a-1)$ и $\Delta_z = 2 - 2a^3 = 2(1-a)(a^2+a+1)$. Систем има јединствено решење када је $\Delta \neq 0$, тј. за $a \neq 1$ и $a \neq -3$ и оно је облика $(x,y,z) = \left(-\frac{4a+5}{a+3}, \frac{1-2a}{a+3}, -\frac{2(a^2+a+1)}{a+3}\right)$. За $a = -3$ систем нема решења, а за $a = 1$ систем има бесконачно много решења облика $(x,y,z) = \left(t, -\frac{t}{3} - 1, \frac{2t}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Одредити растојање између мимоилазних правих $p : (x,y,z)=(1,0,1)+t(6,-4,9)$ и $q : x + z=1, 2x - 3y + z= - 3$.

Напишимо праву q у параметарском облику: ако узмемо да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, добијамо да је права q дата једначном $(x,y,z) = \left(1-t, \frac{5}{3} - \frac{t}{3}, t\right)$. За (рецимо) $t = -1$ добијамо тачку $Q(2,2,-1)$ са праве q, а одговарајући вектор правца $\vec{q}$ је паралелан вектору $\left(-1, -\frac{1}{3}, 1\right)$, па можемо узети $\vec{q} = (3,1,-3)$. Са друге стране, права p садржи тачку $P(1,0,1)$ и има вектор правца $\vec{p} = (6,-4,9)$. Тражено растојање d је висина паралелепиеда разапетог векторима $\vec{p}, \vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ} = (1,2,-2)$ у односу на основу коју разапињу вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Дакле, $d = |[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|/|\vec{p} \times \vec{q}|$. Налазимо $[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] = 57$ и $\vec{p} \times \vec{q} = 3(1,15,6)$, па је $d = 19/\sqrt{262}$.

4. Одредити једначину равни π која садржи праву $l : \frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=z+1$, а са равни $\alpha : x + y = 5$ заклапа угао $\frac{\pi}{4}$.

Из услова да π садржи праву l следи да π садржи и тачку $L(0,1,-1) \in l$ и да је нормала $\vec{n}_\pi = (a,b,c)$ на раван π нормална на вектор правца $\vec{l} = (2,0,1)$ праве l. Дакле, $\vec{n}_\pi \cdot \vec{l} = 0$, тј. $2a + c = 0$. Даље користимо услов да π заклапа угао $\pi/4$ са равни α чији је вектор нормале $\vec{n}_\alpha = (1,1,0)$, па је $\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $a + b = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Решавањем добијеног система следи $\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$, па је раван π дата једначином $1(x-0)+2(y-1)-2(z+1) = 0$, тј. $x+2y-2z = 4$.

Пример 3

Група А

1. Решити матричну једначину $XA = B^{-1}+2X$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   Решење дате једначине је $X = B^{-1}(A-2E)^{-1} = ((A-2E)B)^{-1}$. Даље је

$$(A-2E)B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad ((A-2E)B)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 \\ -2 & -2 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Решити систем једначина $\begin{cases} x \qquad -az = \ \ 1 \\ 2x - \ y + \ z = 1+a \\ ax + 2y - 2z = \ \ 2 \end{cases}$ и дискутовати по $a \in \mathbb{R}$.

   За $a \notin \{-4, 0\}$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = \left(\frac{2(a+2)}{a+4}, -\frac{a^2+a-5}{a+4}, \frac{1}{a+4}\right)$. За $a = -4$ систем нема решења, а за $a = 0$ систем има бесконачно много решења облика $(x,y,z) = (1, t, t-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Одредити праву која је паралелна равни $\pi : x + 2y - 2z = 0$, на растојању 1 од равни π, и лежи у равни $\rho : x + y + z = 7$.

   Нађимо раван β која је паралелна равни π и налази се на растојању 1 од ње. За произвољну тачку (x,y,z) са равни β важи

$$\frac{|x+2y-2z|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 1, \quad \text{па имамо две такве равни:} \quad x + 2y - 2z = \pm 3$$

   Тражена права l налази се у пресеку добијене равни и равни ρ, па постоје две такве праве

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - 2z = 3, \\ x + y + z = 7 \end{cases}, \quad \text{тј.} \quad (x,y,z) = (11-4t, -4+3t, t),\ t \in \mathbb{R},$$

$$l_2 : \begin{cases} x + 2y - 2z = -3, \\ x + y + z = 7 \end{cases}, \quad \text{тј.} \quad (x,y,z) = (17-4t, -10+3t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

4. Свести на канонски облик криву $x^2 + \sqrt{3}xy = y$.

   Овде је $A = 1$, $2B = \sqrt{3}$ и $C = 0$, па је $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$ и крива је хиперболичког типа.

   Угао ротације налазимо из формуле $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\pi}{3}$, па је $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и формуле ротације су $x = (\sqrt{3}x' - y')/2$ и $y = (x' + \sqrt{3}y')/2$, чијом заменом у полазну једначину добијамо ротирану криву $3x'^2 - x' - y'^2 - \sqrt{3}y' = 0$. Последња једначина се може написати у облику $3(x'-1/6)^2 - (y'+\sqrt{3}/2)^2 = -2/3$, па су формуле транслације $x'' = x' - 1/6$ и $y'' = y' + \sqrt{3}/2$. Коначно, канонски облик једначине дате криве је $y''/(2/3) - x''/(2/9) = 1$.