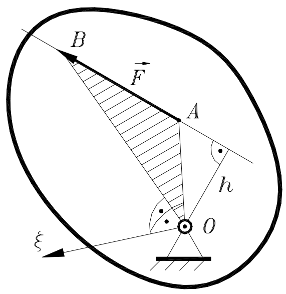
Moment sile

Moment sile za tačku



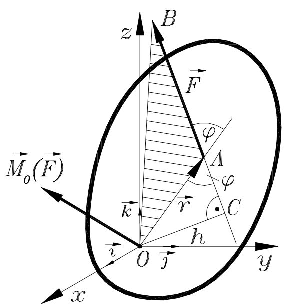
Vektor momenta sile $\vec{F}$ za tačku O obeležava se simbolom $\vec{M}_o(\vec{F})$ i definisan je na sledeći način:

1) Intenzitet vektora momenta sile za tačku jednak je proizvodu intenziteta F sile i kraka h sile, tj.

$$M_o(\vec{F}) = Fh\,. \tag{4.1}$$

2) Pravac vektora momenta sile za tačku upravan je na ravan dejstva sile $\vec{F}$ - ravan određenu tačkama A, B i O.
3) Smer vektora momenta sile za tačku određen je tako da se sa njegovog vrha zamišljeno obrtanje tela pod dejstvom sile $\vec{F}$ vidi u matematički pozitivnom smeru (smeru suprotnom od smera obrtanja kazaljki na časovniku).

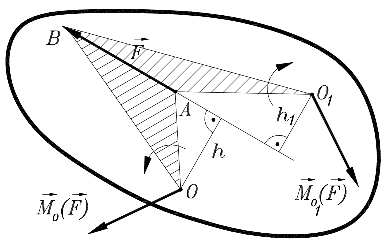
Vektorski izraz momenta sile za tačku



$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_o(\vec{F}) = Fh = rF\sin\varphi$$

Osobine momenta sile za tačku



Površina trougla ABO data je sa

$$P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}\overline{AB}h = \frac{1}{2}Fh = \frac{1}{2}M_o(\vec{F})$$

$$M_o(\vec{F}) = 2P_{\Delta ABO}$$

tj. intenzitet momenta sile za tačku jednak je dvostrukoj površini trougla konstruisanog nad silom kao nad stranom i momentnom tačkom kao nad temenom naspram te strane.

2) Promenom momentne tačke menja se krak sile (intenzitet momenta sile) tako da za dve proizvoljno izabrane momentne tačke O i O_1 važi

$$P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}Fh \quad \text{i} \quad P_{\Delta ABO_1} = \frac{1}{2}Fh_1\,.$$

Na osnovu toga sledi da moment sile za tačku zavisi od izbora momentne tačke, zbog čega se kaže da je vektor vezan za tačku.

3) Moment sile za tačku ne menja se pri promeni napadne tačke sile duž njene napadne linije.

4) Moment sile za tačku jednak je nuli kada je intenzitet sile jednak nuli ili je krak sile jednak nuli, odnosno, napadna linija sile prolazi kroz momentnu tačku.

5) Promenom smera sile $\vec{F}$ menja se i moment $\vec{M}_o(\vec{F})$ sile. Momenti za tačku suprotnih sila su suprotni vektori, tj.

$$\vec{M}_o(\vec{F}_1) = -\vec{M}_o(\vec{F}_2)$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

Analitički izraz momenta sile za tačku

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,,$$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}\,,$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F})\vec{i} + M_{oy}(\vec{F})\vec{j} + M_{oz}(\vec{F})\vec{k}$$

$$M_{ox}(\vec{F}) = yZ - zY,$$
$$M_{oy}(\vec{F}) = zX - xZ$$
$$M_{oz}(\vec{F}) = xY - yX.$$

$$M_o(\vec{F}) = \sqrt{M_{ox}^2(\vec{F}) + M_{oy}^2(\vec{F}) + M_{oz}^2(\vec{F})}$$

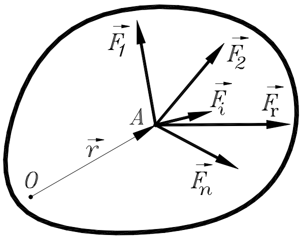
$$\cos\alpha_M = \frac{M_{ox}(\vec{F})}{M_o(\vec{F})}, \quad \cos\beta_M = \frac{M_{oy}(\vec{F})}{M_o(\vec{F})}, \quad \cos\gamma_M = \frac{M_{oz}(\vec{F})}{M_o(\vec{F})}$$

Moment sile za tačku je analitički određen ako su poznate koordinate napadne tačke sile, ili bilo koje tačke na napadnoj liniji sile i ako su poznate projekcije sile na ose izabranog koordinatnog sistema.

Varinjonova teorema o momentu rezultante prostornog sistema sučeljnih sila

<u>Teorema</u>: Moment rezultante prostornog sistema sučeljnih sila za proizvoljnu tačku jednak je zbiru momenata svih sila datog sistema sila za istu tačku.

Dokaz:



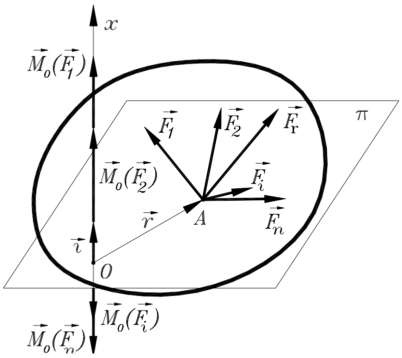
$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_r = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r} \times \vec{F}_i)$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i)$$

<u>Teorema</u>: *Moment rezultante ravnog sistema sučeljnih sila, za neku tačku u ravni dejstva sila, upravan je na ravan dejstva svih sila i jednak zbiru kolinearnih vektora momenata svih sila datog sistema sila za istu tačku.*

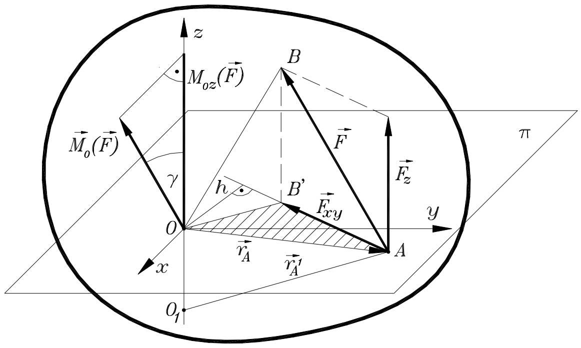
Dokaz:



$$\vec{M}_o(\vec{F}_i) = M_{ox}(\vec{F}_i)\vec{i}$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^{n} M_{ox}(\vec{F}_i)\vec{i}$$

Moment sile za osu



Neka je data sila $\vec{F}$ koja deluje u tački A tela, i neka je uočena osa, koja u odnosu na napadnu liniju sile $\vec{F}$ zauzima proizvoljan položaj.

$$\vec{F} \sim (\vec{F}_z, \vec{F}_{xy})$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_z) + \vec{M}_o(\vec{F}_{xy})$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F})\vec{i} + M_{oy}(\vec{F})\vec{j} + M_{oz}(\vec{F})\vec{k}$$

$$M_{oz}(\vec{F}) = M_{oz}(\vec{F}_z) + M_{oz}(\vec{F}_{xy})$$

$$\vec{F}_z = Z\vec{k}\,,$$
$$\vec{r}_A = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$M_{oz}(\vec{F}_z) = x \cdot 0 - y \cdot 0$$

$$M_{oz}(\vec{F}_z) = 0$$

Projekcija momenta sile za tačku na osi, na osu sa kojom je ta sila paralelna, jednaka je nuli.

$$M_{oz}(\vec{F}) = M_{oz}(\vec{F}_{xy})$$

Kako je ravan dejstva sile $\vec{F}_{xy}$ upravna na osu *Oz*, tada postoji samo projekcija momenta te sile za tačku *O*, na osu *Oz*, i ona je jednaka algebarskoj vrednosti momanta te sile za istu tačku *O*, tj.

$$M_{oz}(\vec{F}_{xy}) = \pm M_o(\vec{F}_{xy})$$

$$M_{oz}(\vec{F}) = \pm F_{xy}h$$

Moment sile za osu je skalarna veličina čiji je intenzitet jednak proizvodu intenziteta projekcije sile na ravan upravnu na tu osu i rastojanja napadne linije te projekcije do tačke prodora ose kroz ravan; znak momenta sile za osu je pozitivan ako se obrtno dejstvo projekcije sile vidi kao matematički pozitivno, gledano sa vrha momentne ose (ose za koju se računa moment sile).

Iz prethodnog sledi da se isti zaključak može izvesti i za bilo koju ravan upravnu na momentnu osu.

Može se pokazati da projekcija na osu, momenta sile za tačku na toj osi, ne zavisi od izbora te momentne tačke. Tako, ako se posmatra proizvoljna tačka O_1 na osi *Oz* može se pisati

$$\vec{M}_{o_1}(\vec{F}) = \vec{r}_A^{\,1} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_A^{\,1} = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_A$$

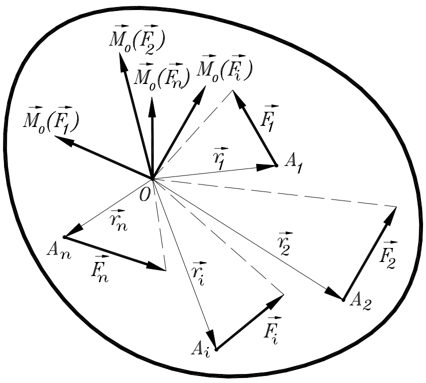
$$\vec{M}_{o_1}(\vec{F}) = \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \vec{F}\,.$$

Skalarno množeći prethodnu relaciju sa jediničnim vektorom ose *Oz* ($\vec{k}$), imajući u vidu da je $(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = 0$, dobija se

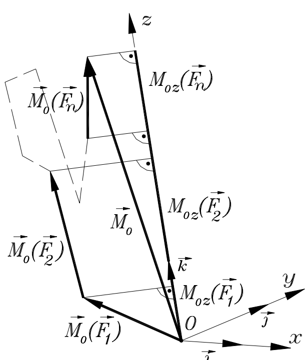
$$M_{o_1z}(\vec{F}) = M_{oz}(\vec{F})$$

Moment sile za osu jednak je projekciji na tu osu momenta sile za bilo koju tačku na toj osi.

Glavni moment sistema sila za tačku i osu



a)



b)

Neka je dat proizvoljan sistem od n sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ koji deluje u tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tela, respektivno.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Kao i svaki sistem sučeljnih vektora i ovaj ima rezultantu koja se naziva glavni moment datog sistema sila za tačku O, tj.

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

Pod glavnim momentom proizvoljnog sistema sila za neku tačku podrazumeva se vektorski zbir momenata svih sila za tu istu tačku.

Kako je

$$M_{oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{oz}(\vec{F}_i)$$

Pod glavnim momentom proizvoljnog prostornog sistema sila, za neku osu, podrazumeva se algebarski zbir momenata svih sila za tu istu osu.

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \vec{M}_o\vec{i}\,, \\ M_{oy} &= \vec{M}_o\vec{j} \\ M_{oz} &= \vec{M}_o\vec{k}\,. \end{aligned}$$

Glavni moment proizvoljnog sistema sila za osu, jednak projekciji na tu osu glavnog momenta tog sistema sila za bilo koju tačku na toj osi.

Teorema: Moment rezultante prostornog sistema sučeljnih sila, za proizvoljno izabranu tačku, jednak je glavnom momentu tog sistema sila za tu momentnu tačku.

Teorema: Moment rezultante ravnog sistema sučeljnih sila, za neku tačku u ravni dejstva sila, jednak je glavnom momentu svih sila datog sistema sila za tu tačku i upravan je na ravan dejstva sila.

Analitički način određivanja glavnog momenta sistema sila

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{i=1}^{n} M_{ox}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(y_i Z_i - z_i Y_i)\,, \\ M_{oy} &= \sum_{i=1}^{n} M_{oy}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(z_i X_i - x_i Z_i) \\ M_{oz} &= \sum_{i=1}^{n} M_{oz}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i)\,. \end{aligned}$$

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{M_{ox}}{M_o}, \quad \cos\beta = \frac{M_{oy}}{M_o}, \quad \cos\gamma = \frac{M_{oz}}{M_o}$$