Рада Мутавџић Ђукић

4 Аналитичка геометрија - теорија

4.1 Права и раван

Права у простору

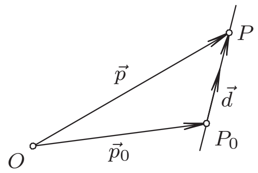
Права је једнозначно одређена једном својом тачком и било којим својим паралелним вектором.

Дефиниција 4.1. Вектор правца праве је сваки вектор који је паралелан датој правој.

Теорема 4.1. Свака тачка $P(x, y, z)$ праве p која садржи тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и има вектор правца $\vec{d} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ је облика

$$P = P_0 + t\vec{d}, \quad \text{тј.} \quad (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказ. Нека су $\vec{p}_0$ и $\vec{p}$ редом вектори положаја тачка P_0 и P. Како је $\vec{p} = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0P}$, видимо да тачка P лежи на правој p ако и само ако је $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{d}$, за неку константу t. □



Елиминацијом параметра t добија се *канонски облик* једначине праве.

Теорема 4.2. Канонски облик једначине праве која садржи тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и има вектор правца $\vec{d} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ је

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Пример 4.1. Наћи канонски облик једначине праве која садржи тачку $P_0(1, 2, -3)$ и паралелна је правој $l : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(-2, 1, 0)$.

Вектор правца праве l је $\vec{d} = (-2, 1, 0)$. Како је вактор правца тражене праве паралелан правој l, вектор $\vec{d}$ се може узети као вектор правца нове праве, па је њена једначина у канонском облику

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 3}{0}.$$

Права кроз две дате тачке $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ има вектор правца $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, па је њена једначина

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Раван у простору

Раван је једнозначно одређена било којим својим нормаланим вектором и једном својом тачком.

Дефиниција 4.2. Вектор нормале на раван је било који ненула вектор који је нормалан на ту раван.

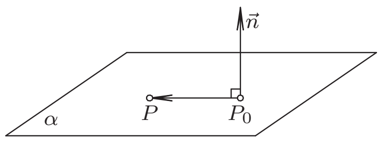
Вектор је нормалан на раван ако и само ако је нормалан на све векторе у тој равни.

Нека је раван α одређена тачком $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором нормале $\vec{n} = (a, b, c)$.

Теорема 4.3. Раван која садржи тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормална је на вектор $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ је дата једначином

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Доказ. Тачка $P(x, y, z)$ лежи у равни α ако и само ако је вектор $\vec{n}$ нормалан на вектор $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, тј. ако и само ако важи $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. □



Пример 4.2. Наћи једначину равни која садржи тачку $P_0(1,2,-3)$ и паралелна је равни $\alpha : -x+y+3z=0$.

Вектор нормале на раван α је $\vec{n}=(-1,1,3)$. Како је тражена раван паралелна равни α, вектор $\vec{n}$ се може узети за вектор нормале нове равни и њена једначина је $(-1)(x-1)+(y-2)+3(z+3)=0$, тј. $-x+y+3z=-8$.

Раван α се може описати и помоћу једне тачке $A(x_0,y_0,z_0)$ у равни α и два вектора $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ и $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ паралелна равни α. Тада се свака тачка M са те равни може записати у облику

$$M = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad \text{тј.} \quad (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(u_1,u_2,u_3) + s(v_1,v_2,v_3) \quad (t,s \in \mathbb{R}),$$

што представља *параметарску једначину равни.* Ако је раван задата параметарски, тада је вектор нормале на раван паралелан вектору $\vec{u}\times\vec{v}$.

Нека су дате три тачке $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ и $P_3(x_3,y_3,z_3)$. Тачка $P(x,y,z)$ равни која је одређена тачкама P_1, P_2 и P_3 задовољава једначину $[\overrightarrow{P_1P},\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}]=0$.

Тако добијамо *општу једначину равни кроз три дате тачке*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Права као пресек две равни. Прамен равни

Нека су дате две равни $\alpha : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $\beta : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Ако вектори нормала $\vec{n}_\alpha=(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{n}_\beta=(a_2,b_2,c_2)$ нису колинеарни, равни α и β се секу по правој p.

Једначина праве p се може наћи решавањем система једначина који чине равни α и β.

Други начин је да приметимо да је вектор правца $\vec{p}$ праве p нормалан на оба вектора $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$. Тада можемо узети $\vec{p}=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta$. Да бисмо одредили једну тачку праве p довољно је наћи једно решење система (који чине једначине равни α и β).

Пример 4.3. Праву p која је пресек равни $\alpha : 3x+y+z=0$ и $\beta : x-y+3z=4$ представити у канонском облику.

Сабирањем датих једначина добијамо $4x+4z=4$, одакле је $x=1-z$. Заменом претходне једначине у (рецимо) једначину равни α, добијамо $y=2z-3$. Дакле, ако је $z=t$, једначина праве p у параметарском облику је $(x,y,z)=(1,-3,0)+t(-1,2,1)$, па је њен канонски облик $p : \frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Приметимо да бесконачно много равни садрже дату праву p.

Дефиниција 4.3. Прамен равни је скуп свих равни које садрже дату праву p.

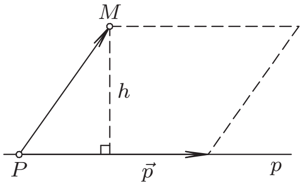
Нека је права p пресек равни $\alpha : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $\beta : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Равни из прамена које садрже праву p без равни β задовољавају једначину

$$\gamma_\lambda : a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0 \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Растојања у простору

Теорема 4.4. Растојање тачке M од праве $p=P+t\vec{p}$ је $\dfrac{|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}$.

Доказ. Тражено растојање је висина h паралелограма одређеног векторима $\vec{p}$ и $\overrightarrow{PM}$, чија је површина $|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}|$ а дужина одговарајуће основе $|\vec{p}|$. □



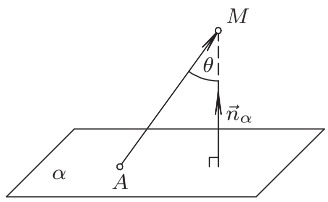
Теорема 4.5. Растојање тачке $M(x_0,y_0,z_0)$ од равни $\alpha : ax+by+cz+d=0$ је $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Доказ. Нека је $A(x_A, y_A, z_A)$ произвољна тачка у равни α, $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ вектор нормале на раван α, $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{AM}, \vec{n}_\alpha)$ и d тражено растојање. Тада је

$$d = ||\overrightarrow{AM}|\cos\theta|,$$

па из једнакости $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_\alpha = |\overrightarrow{AM}||\vec{n}_\alpha|\cos\theta$ следи да је

$$d = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|}.$$



Коначно, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_\alpha = (x_0 - x_A, y_0 - y_A, z_0 - z_A) \cdot (a, b, c) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$, јер тачка A лежи у равни α и $|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. □

Међусобни положај две праве

Нека су дате праве $p{=}P{+}t\,\vec{p}$ и $q{=}Q{+}s\,\vec{q}$, где су t и s произвољни реални бројеви.

Теорема 4.6. (i) Праве p и q се поклапају ако и само ако су вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни;

(ii) Праве p и q се секу ако и само ако су вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$ колинеарни, а вектор $\overrightarrow{PQ}$ им није колинеаран;

(iii) Праве p и q су мимоилазне ако и само ако је $[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$.

Међусобни положај две праве може се одредити и решавањем одговарајућег система једначина. Тако налазимо и пресечну тачку, у случају да се праве секу.

Пример 4.4. Наћи пресечну тачку правих $p : (x, y, z) = (-2t, 1{+}2t, 3t)$ и $q : (x, y, z) = (-1{-}3s, 3{+}2s, 5{+}s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$.

Изједначавањем одговарајућих координата добијамо систем $-2t = -1 - 3s$, $1 + 2t = 3 + 2s$, $3t = 5 + s$, чије је решење $(t, s) = (2, 1)$. Враћањем било које од тих вредности у одговарајуће једначине добијамо координате пресечне тачке $(-4, 5, 6)$.

За мимоилазне праве важи наредна теорема.

Теорема 4.7. Мимоилазне праве p и q имају јединствену заједничку нормалу, тј. праву n која је сече обе праве p и q и нормална је на њих.

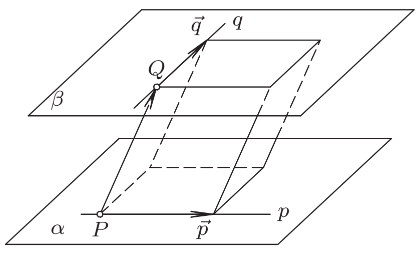
Може се показати да је растојање између мимоилазних правих p и q једнако растојању између подножја M и N заједничке нормале.

Теорема 4.8. Растојање између мимоилазних правих $p = P + t\,\vec{p}$ и $q = Q + s\,\vec{q}$ $(t, s \in \mathbb{R})$ је

$$\frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Доказ. Нека су α и β паралелне равни такве да раван α садржи праву p и паралелна је правој q, док раван β садржи праву q и паралелна је правој p.

Вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ одређују паралелепипед запремине $|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|$. За његову основу можемо узети паралелограм који одређују вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$, налази се у равни α и чија је површина $|\vec{p} \times \vec{q}|$. Одговарајућа висина паралелепипеда једнака је растојању паралелних равни α и β, што је и растојање између мимоилазних правих p и q, одакле следи формула. □



Пример 4.5. Наћи растојање између мимоилазних правих $p : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Параметарске једначине правих p и q су редом $p = P + t\,\vec{p}$ и $q = Q + s\,\vec{q}$, где је $P(-1, 1, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$, $\vec{p} = (1, -1, 0)$, $\vec{q} = (-2, 0, 1)$ и t и s су произвољни реални бројеви. Применом претходне теореме добијамо да је растојање између датих правих $d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$. Како је $|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]| = 3$ и $|\vec{p} \times \vec{q}| = \sqrt{6}$, то је $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Међусобни положај две равни

Нека су дате равни $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Означимо са $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ њихове векторе нормала, редом.

(i) Равни α и β се поклапају ако и само ако је $(a_2, b_2, c_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1, d_1)$ за неки број $\lambda \neq 0$.

(ii) Равни α и β су паралелне ако и само ако је $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$ за неки број $\lambda \neq 0$. То се може написати и у облику $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| = 0$.

(iii) Равни α и β су секу по правој ако и само ако нису паралелне, тј. ако и само ако важи $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| \neq 0$.

Међусобни положај праве и равни

Нак је дата права $p = P_0 + t\,\vec{p}$ $(t \in \mathbb{R})$ и раван α чији је вектор нормале $\vec{n}_\alpha$.

(i) Права p припада равни α ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ и $P_0 \in \alpha$;

(ii) Права p је паралелна равни α $(p \cap \alpha = \emptyset)$ ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ и $P_0 \notin \alpha$;

(iii) Права p и раван α се секу у тачки ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$.

Пример 4.6. У ком су међусобном положају права $p : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, 2, -3)$ и раван $\alpha : 2x - y = 3$?

Вектор правца праве $\vec{p} = (1, 2, -3)$ и вектор нормале на раван $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$ су нормални, јер је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Тачка $(1, 0, -1)$ са праве p не припада равни α, јер је $2 \cdot 1 - 0 \neq 3$, па су права p и раван α паралелне.

Угао између две праве

Праве $p = P + t\,\vec{p}$ и $q = Q + s\,\vec{q}$ $(t, s \in \mathbb{R})$ граде два угла, а за угао између њих узимамо онај који није туп, тј.

$$\sphericalangle(p, q) = \arccos \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

Угао између две равни

Угао између равни α чији је вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ и равни β чији је вектор нормале $\vec{n}_\beta$ једнак је углу између њихових нормала, тј.

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

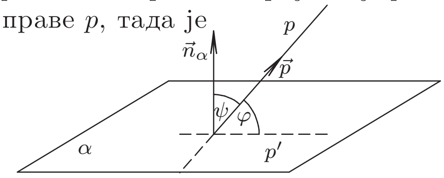
Угао између праве и равни

Угао φ између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α. Ако је ψ угао између нормале на раван $\vec{n}_\alpha$ и правца $\vec{p}$ праве p, тада је

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|},$$

па је

$$\varphi = \arcsin \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|}.$$



Пример 4.7. Израчунати угао између праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{0}$ и равни $\alpha : x - 2y - 2z = 4$.

Вектор правца праве p је $\vec{p} = (1, -1, 0)$, а вектор нормале на раван α је $\vec{n}_\alpha = (1, -2, -2)$. Тражени угао је

$$\arcsin \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|} = \arcsin \frac{|(1, -1, 0)) \cdot (1, -2, -2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

4.2 Криве другог реда

Конусни пресеци

Конусни пресек представља пресек конуса и произвољне равни у простору.

Ако раван садржи врх конуса, тада је пресек тачка, парава или две праве које се секу. У том случају конусни пресеци су *дегенерисани* и неки аутори их не сматрају конусним пресецима. Далеко важнији је случај *недегенерисаних* конусних пресека (*коника*) - елипсе, параболе и хиперболе.

Основна особина коника (осим круга) је да постоји тачка F (*жижа*) и права d (*директриса*) такве да је однос растојања произвољне тачке M конике до њих константан

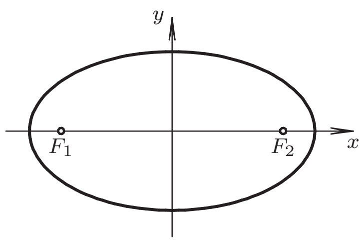
$$e = \frac{MF}{\mathrm{d}(M,d)} \quad \text{(e је \textit{ексцентритет} конике.)}$$

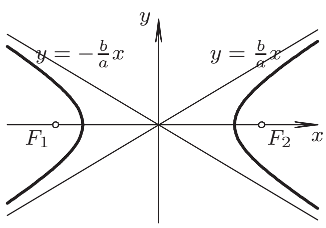
За $0 < e < 1$ коника је елипса, $e = 0$ круг, $e = 1$ парабола и $e > 1$ хипербола.

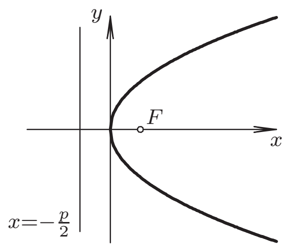
Канонски облик

У декартовом координатном систему, конике се могу записати у канонском облику

- кружница $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$;
- елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0):$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$,
  жиже су $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, директирсе су $x = \pm\frac{a}{e}$;
- хипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0):$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a}$,
  жиже су $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, директирсе су $x = \pm\frac{a}{e}$, асимптоте су $y = \pm\frac{b}{a}x$;
- парабола $x^2 = 2py$ $(p \neq 0)$:
  жижа је $F(\frac{p}{2}, 0)$, директриса је $x = -\frac{p}{2}$.







У параметарским координатама, одговарајуће једначине су

- кружница $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\quad \theta \in [0, 2\pi)$,
- елипса $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\quad \theta \in [0, 2\pi)$,
- хипербола $x = \pm a\,\mathrm{ch}\,\theta$, $y = b\,\mathrm{sh}\,\theta$, $\quad \theta \in \mathbb{R}$,
- парабола $x = t$, $y = \frac{t^2}{2p}$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

Криве другог реда

Крива другог реда је дата једначином:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \tag{4.1}$$

Њен график је коника или нека дегенерисана крива. У канонском облику, дегенерисане криве другог реда су:

1° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (тачка);

2° $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (празан скуп);

3° $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (две праве које се секу);

4° $x^2 = 0$ $(y^2 = 0)$ (права);

5° $x^2 = p^2$ $(y^2 = q^2)$ (две паралелне праве);

6° $x^2 = -p^2$ $(y^2 = -q^2)$ (празан скуп).

Криве 1° и 2° су елиптичког типа, крива 3° хиперболичког, а 4°, 5° и 6° параболичког типа.

Дискриминанта ове једначине је $B^2 - 4AC$, тј. $-\delta$, где је $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

Ако коника није дегенерисана, тада је она:

- за $B^2 - 4AC < 0$ елипса;

- за $B^2 - 4AC > 0$ хипербола;

- за $B^2 - 4AC = 0$ парабола.

Инваријанте кривих дургог реда при ротацији и транслацији координатног система су дискриминанта $-\delta$, *траг* $A + C$ и детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Ако је $\Delta = 0$, тада је крива другог реда дегенерисана.

Свођење криве на канонски облик

Крива другог реда (4.1) се своди на канонски облик транслацијом и ротацијом координатног система. Тада се старе координате (x, y) изражавају преко нових (x', y') на следећи начин:

1° ротација за угао α око тачке $O(0,0)$: $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$, $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$;

2° транслација за вектор (u, v): $x = x' - u$, $y = y' - v$.

Угао α за који треба ротирати координатни систем приликом свођења криве (4.1) на канонски облик добијамо из формуле

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2B}{A - C},$$

па синус и косинус угла α налазимо из формула

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg }^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tg }^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\text{tg } \alpha}.$$

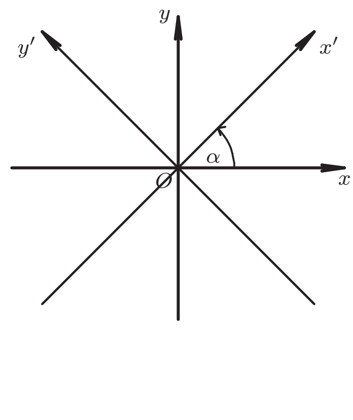
Тако сводимо криву на облик $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$ (коефицијент уз $x'y'$ је 0).

Затим треба извршити транслацију координатног система за вектор (u, v), $(u, v) = \left(\frac{D'}{A'}, \frac{E'}{C'}\right)$ за $A', C' \neq 0$. Ако је $A' = 0$ узимамо да је $u = 0$, а ако је $C' = 0$ узимамо да је $v = 0$. Тада је $x' = x'' - u$, $y' = y'' - v$.

Пример 4.8. Свести криву другог реда $xy - 5x + 7y + 9 = 0$ на канонски облик.

Општа једначина криве другог реда је $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, а угао ротације је $\text{tg } 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$. Овде је $A = C = 0$ и $B = \frac{1}{2}$, па је $\text{tg } 2\alpha = \infty$ и можемо узети да је $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, тј. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Формуле ротације су $x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$ и $y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$, где је Oxy стари координатни систем, а $Ox'y'$ нови координатни систем (добијен ротацијом старог за угао α). Заменом формула ротације $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ и $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ у полазној једначини добијамо



$$\frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') - \frac{5}{\sqrt{2}}(x' - y') + \frac{7}{\sqrt{2}}(x' + y') + 9 = 0,$$

одакле је

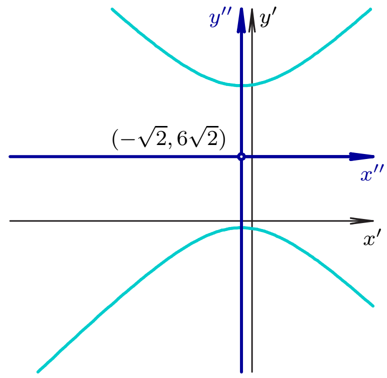
$$x'^2 + 2\sqrt{2}x' - y'^2 + 12\sqrt{2}y' + 18 = 0.$$

Ова једначина се може написати у облику

$$(x' + \sqrt{2})^2 - (y' - 6\sqrt{2})^2 + 88 = 0,$$

тј.

$$\frac{(y'-6\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$



Видимо да је дата крива хипербола са центром $(-\sqrt{2},6\sqrt{2})$ (у координатном систему $Ox'y'$) и да су формуле транслације $x''=x'+\sqrt{2}$ и $y''=y'-6\sqrt{2}$. Дакле, канонски облик је

$$\frac{y''^2}{(2\sqrt{22})^2}-\frac{x''^2}{(2\sqrt{22})^2}=1.$$

Одговарајуће трансформације координата су

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}-y''-6\sqrt{2}\right)=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}-7,$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x''-\sqrt{2}+y''+6\sqrt{2}\right)=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}+5.$$

4.3 Површи другог реда

Површ другог реда је дата једначином:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \quad (A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0).$$

Нека су $a,b,c>0$. Недегенерисане површи другог реда у канонском облику су:

1° елипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2° једнокрилни хиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

3° двокрилни хиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

4° елиптички параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p\cdot q>0)$;

5° хиперболички параболоид $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p\cdot q>0)$.

Важне су и следеће дегенерисане површи другог реда:

6° елиптички конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;

7° елиптички цилиндар $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

8° хиперболички цилиндар $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

9° параболички цилиндар $x^2=2py$ $(p\neq 0)$.