

## 8 Тејлоров полином

### 8.1 Тејлоров и Маклоренов полином

Нека је  $f$  диференцијабилна функција у некој околини тачке  $a$ . Тада је *једначина тангенте*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

заправо *линеарна апроксимација* функције  $f$  у околини тачке  $a$ .

Ако означимо

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

тада је

$$f(a) = T_1(a), \quad f'(a) = T_1'(a) \quad \text{и} \quad f(x) \approx T_1(x) \quad \text{за } x \text{ из околине тачке } a.$$

Полином  $T_1(x)$  је *Тејлоров полином* првог степена за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .

Слично, можемо пожелити да два пута диференцијабилну функцију  $f$  у околини тачке  $a$  апроксимирамо квадратним полиномом  $T_2(x)$  тако да важи

$$f(a) = T_2(a), \quad f'(a) = T_2'(a) \quad \text{и} \quad f''(a) = T_2''(a).$$

Тада је

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

Тејлоров полином другог степена за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .

**Дефиниција 8.1.** Нека је функција  $f(x)$  дефинисана на интервалу који садржи тачку  $a$  у унутрашњости и  $n$  пута диференцијабилна у тачки  $a$ .

*Тејлоров полином реда  $n$*  за функцију  $f$  у околини тачке  $a$  је полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Ако је  $a = 0$ , полином  $T_n$  називамо *Маклореновим полиномом*.

**Пример 8.1.** Наћи Маклоренов полином степена  $n \in \mathbb{N}$  за функцију  $f(x) = e^x$ .

Тражени полином је облика

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Како је  $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$  и  $f(0) = 1$ , добијемо

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

У горњој формули смо користили да је  $0! = 1$  и  $f^{(0)} = f$ .

**Пример 8.2.** Наћи Тејлоров полином степена 3 за функцију  $f(x) = x^3$  у околини тачке  $a = 2$ .

Овде је  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f'''(x) = 6$  (приметимо да су сви изводи реда већег од 3 једнаки нули, па је  $f(x) \equiv T_3(x)$ ). Дакле,  $f(2) = 8$ ,  $f'(2) = 12$ ,  $f''(2) = 12$ ,  $f'''(2) = 6$  и заменом у формули

$$T_3(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x - 2)^3$$

добијемо

$$T_3(x) = 8 + 12(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

## 8.2 Маклоренови развоји неких основних функција

Маклоренови развоји су Маклоренови полиноми произвољног степена, тј. степени редови. За функцију  $f$  која има све изводе у тачки  $a$  тај развој је облика

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

**Пример 8.3.** Наћи Маклоренов развој функције  $f(x) = e^x$ .

На основу примера 8.1 Маклореновог полинома степена  $n$ , видимо да је тражени (бесконачни) развој

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

**Пример 8.4.** Наћи Маклоренов развој функције  $f(x) = \sin x$ .

Овде је  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ , па је  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -1$ ,  $f^{(4)}(0) = 0$ . Примећујемо да је  $f^{(4k)} = f$ ,  $f^{(4k+1)} = f'$ ,  $f^{(4k+2)} = f''$  и  $f^{(4k+3)} = f'''$  за  $k \in \mathbb{N}$ . Дакле,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Слично се добијају и следећи Маклоренови развоји:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^a \approx 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n,$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

**Пример 8.5.** Апроксимирати функцију  $\ln(1+x-x^2)$  Маклореновим полиномом четвртог степена.

Користимо познати развој  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1+x-x^2) &= x - x^2 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} - \frac{(x-x^2)^4}{4} + o((x-x^2)^4) \\ &= x - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3 + x^4) + \frac{1}{3}(x^3 - 3x^4) - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

## 8.3 Процена грешке

При апроксимацији  $n$  пута непрекидно диференцијабилне функције  $f$  Тејлоровим полиномом степена  $n$  у околини тачке  $a$ :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

јавља се грешка  $R_n$ , при чему важи  $R_n = o(x^n)$ .

Следеће опште тврђење је доказао Лагранж, а у доказу се користи Ролова теорема.

**Теорема 8.1.** Нека је функција  $f$   $n+1$  пута диференцијабилна у интервалу који садржи тачке  $a$  и  $b$  и нека је  $T_n(x)$  њен Тејлоров полином степена  $n$  у околини тачке  $a$ . Тада за грешку  $R_n(x)$  важи

$$R_n(b) = f(b) - T_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

где је  $c$  нека (непозната) тачка између  $a$  и  $b$ .

**Пример 8.6.** Проценити грешку апроксимације функције  $f(x) = \cos x$  Маклореновим полиномо другог степена за  $x = 0,6$ .

Одговарајући Маклоренов полином је  $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ , а грешка је облика

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3, \quad \text{за неко } c \text{ између } 0 \text{ и } 0,6.$$

Сада проценимо апсолутну вредност грешке за  $x = 0,6$ :

$$|R_2(0,6)| = \frac{|\sin c|}{3!}0,6^3 \leq \frac{0,6^3}{6} = 0,036.$$

## 8.4 Испитивање асимптотике функције

Важна примена Тејлоровог полинома је у одређивању асимптотике функције. Размотримо следеће примере.

**Пример 8.7.** Израчунати граничне вредности

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + 1/x)), \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  кад  $t \rightarrow 0$  (мало „о“ од  $f(t)$  је функција за коју важи  $o(f(t))/f(t) \rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow 0$  тј.  $o(f(t))$  је занемарљиво мала у поређењу са  $f(t)$ ) имамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - x + \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену  $x = 1/t, t \rightarrow 0$ , дати лимес се своди на

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \stackrel{\text{л.п.}}{\underset{(0/0)}{=}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Користимо Маклоренове развоје  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  и  $\sin t = t + o(t^2)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos^2 x)}{x \sin 3x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(3x + o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје  $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$  и  $\ln(1+t) = t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**Пример 8.8.** Наћи домен и асимптоте функције  $\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1$ .

Домен ове функције је  $\frac{x^3}{x+1} \geq 0$ , тј.  $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ . Права  $x = -1$  је вертикална асимптота, јер је

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 = \infty.$$

Да бисмо одредили понашање функције кад  $x \rightarrow \pm\infty$ , можемо користити Маклоренов полином функције  $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( 1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x - \frac{3}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права  $y = 2x - \frac{3}{2}$  коса асимптота кад  $x \rightarrow \infty$ . Слично,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \left( 1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права  $y = -\frac{1}{2}$  хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow -\infty$ .

## 8.5 Задаци

1. Апроксимирати функцију

$$y = (x^2 - 1)e^{-2x}$$

Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу  $[0, 1]$ .

Првих пет извода су  $y'(x) = -2e^{-2x}(x^2 - x - 1)$ ,  $y''(x) = 2e^{-2x}(2x^2 - 4x - 1)$ ,  $y'''(x) = -4e^{-2x}(2x^2 - 6x + 1)$ ,  $y^{(4)}(x) = 16e^{-2x}(x^2 - 4x + 2)$  и  $y^{(5)}(x) = -32e^{-2x}(x^2 - 5x + 4)$ . Даље је  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -2$ ,  $y'''(0) = -4$  и  $y^{(4)}(0) = 32$ , па је Маклоренов полином четвртог степена

$$T_4(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4, \quad \text{тј.} \quad T_4(x) = -1 + 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4.$$

Грешка апроксимације је

$$R_4(x) = \frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5, \quad \text{за } t \in (0, x), \quad \text{при чему је } x \in [0, 1].$$

За оцену грешке, нађимо максимум функције  $|y^{(5)}(t)|$  за  $t \in (0, 1)$  и узимамо да је  $x=1$ :

$$\max_{t \in (0,1)} |-32e^{-2t}(t^2 - 5t + 4)| < 32e^0 \cdot 4 = 128, \quad \text{па је } |R_4(1)| < \frac{16}{15} \quad \text{за } x \in [0, 1].$$

2. Апроксимирати функцију

$$y = \sqrt[5]{2x - 1}$$

Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке  $a = 1$ . Користећи овај полином приближно израчунати  $\sqrt[5]{1,2}$  и проценити грешку.

Прва четири извода су  $y'(x) = \frac{2}{5}(2x - 1)^{-4/5}$ ,  $y''(x) = -\frac{16}{25}(2x - 1)^{-9/5}$ ,  $y'''(x) = \frac{288}{125}(2x - 1)^{-14/5}$  и  $y^{(4)}(x) = -8064/625(2x - 1)^{-19/5}$ . Тејлоров полином трећег степена у тачки  $a = 1$  је

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x - 1)^3, \quad \text{тј.}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{5}(x - 1) - \frac{8}{25}(x - 1)^2 + \frac{48}{125}(x - 1)^3.$$

Даље је  $y(1, 1) \approx T_3(1, 1) = 1,037184$ . За  $1 < t < 1,1$  је  $(2t - 1)^{-19/5} < 1$ , па је

$$|R_3(1, 1)| < \frac{1}{4!} \frac{8064}{625} \cdot 0,1^4 \approx 5,4 \cdot 10^{-5}.$$

3. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију  $y = y(x)$  дату једначином  $x + y = \operatorname{arctg}(xy)$ .

Прво приметимо да је  $y = 0$  за  $x = 0$ . Диференцирањем дате једначине (по  $x$ ) добијамо

$$1 + y' = \frac{y + xy'}{1 + (xy)^2},$$

одакле за  $x = y = 0$  добијамо  $y'(0) = -1$ . Даљим диференцирањем добијамо

$$y'' = \frac{(y' + y' + xy'')(1 + (xy)^2) - (y + xy')2xy(y + xy')}{(1 + (xy)^2)^2},$$

одакле за  $x = y = 0$  и  $y'(0) = -1$  добијамо  $y''(0) = -2$ . Тражени Маклоренов полином је  $T_2(x) = -x - x^2$ .