Materijal sa vežbi

Zadatak 1. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

Rešenje: Kako je

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{k\to+\infty} k^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} e^{\frac{1}{k}\ln k} = e^{\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{k}} = e^{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}} = e^0 = 1$$

na osnovu Lopitalovog pravila, to za opšti člna datog reda važi

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1,$$

odakle na osnovu najosnovnijeg kriterijuma (ne)konvergencije sledi da dati red divergira.

Zadatak 2. Izračunati $\int_0^1 \sin^2 t\,dt$ sa greškom manjom od 10^{-3} (jasno je da se dati integral ne može eksplicitno rešiti).

Rešenje zadatka se referiše na Lajbnicov kriterijum konvergencije alternativnih (naizmeničnih) redova Imamo da je, korišćenjem razvoja za sinusnu funkciju,

$$f(t) = \sin t^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{4n-2}}{(2n-1)!},$$

i razvoj važi na celoj realnoj osi $(-\infty, +\infty)$.

Kako se stepeni red sme u oblasti svoje konvergencije integraliti član po član, razvoj u red funkcije $\displaystyle\int_0^1 \sin^2 t\,dt$ glasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^1 t^{4n-2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!},$$

što predstavlja alternativni brojni red. Kako je

$$|R_{n+1}| < \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} < \frac{1}{10^3},$$

ispunjeno za $2, 3, \ldots,$ to je

$$\int_0^1 \sin^2 t\,dt \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} = 0.30952$$

sa greškom manjom od 10^{-3}.

Aleksandar Pejčev