Машински факултет, Београд 1.12.2022.

Градиво за други колоквијум из Математике 1 - смене 2, 4, 6 и 7

1. Израчунати граничне вредности

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln(1+1/x)\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 x}{x\sin 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$, ђ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3x}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$, з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x^3 - 1}{(x-\sin x)^2}$.

а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ кад $t\to 0$ (мало „о” од $f(t)$ је функција за коју важи $o(f(t))/f(t)\to 0$ кад $t\to 0$ тј. $o(f(t))$ је занемарљиво мала у поређењу са $f(t)$) имамо

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x + \frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену $x = 1/t, t\to 0$, дати лимес се своди на

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \underset{(0/0)}{\overset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Задатак ћемо решити свођењем на познати лимес $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\sin^2\frac{x}{2}}{x^4}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{\sin^4\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^4\frac{x}{2}}{2^4\left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{1}{8}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\sin t = t + o(t^2)$ кад $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 x}{x\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}{x\sin 3x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x(3x+o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{г)}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\ln\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} -\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Применом Лопиталовог правила на последњи лимес добијамо

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/\cos x}{2\operatorname{tg} x/\cos^2 x}} = \sqrt{e}.$$

$$\text{д)}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-1/2}-(1+x^2)^{-1}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)+(1+x^2)^{-2}2x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

ђ) Користимо познати лимес $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{(x-2)\frac{3x}{x-2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}} = e^3.$$

е) Користимо Маклоренове развоје $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$ кад $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = -\frac{1}{6}.$$

ж) Коришћењем Маклоренових развоја $\sin x = x + o(x)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ кад $x\to 0$ добијамо

$$\sqrt{1+x\sin x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} \quad\text{и}\quad \sqrt{\cos x} = \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)}.$$

Затим се може користити Маклоренов развој $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$:

$$\sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad\text{и}\quad \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)} = 1-\frac{x^2}{4}+o(x^2).$$

Дакле, полазни лимес је

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\frac{x^2}{2}-1+\frac{x^2}{4}+o(x^2)} = \frac{4}{3}.$$

з) На основу Маклоренових развоја $\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ и $\sin x = x - \frac{x^3}{6}+o(x^3)$ кад $x\to 0$, полазни лимес постаје

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^6}{2}-1+o(x^6)}{\left(x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2} = 18.$$

2. Написати једначину нормале на криву
$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln^2 \sqrt{x-1}}$$
у тачки у којој је $x = 10$.

Нека је $f(x) = \sqrt{x-1}$ и $g(x) = \ln^2 \sqrt{x-1} = \left(\frac{1}{2}\ln(x-1)\right)^2 = \frac{1}{4}\ln^2(x-1)$. Тада је $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $g'(x) = \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}$, па је
$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \ln^2 \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} \cdot \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}}{\ln^4 \sqrt{x-1}} = \frac{\ln\sqrt{x-1} - 2}{2\sqrt{x-1}\ln^3\sqrt{x-1}}.$$
Даље је $y'(10) = \frac{\ln 3 - 2}{6\ln^3 3}$. Приметимо још да је $y(10) = \frac{3}{\ln^2 3}$. Заменом ових вредности у једначину нормале $y - y(10) = -\frac{1}{y'(10)}(x-10)$ добијамо
$$y - \frac{3}{\ln^2 3} = \frac{6\ln^3 3}{2 - \ln 3}(x - 10).$$

3. За криву дату параметарски $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ наћи нагиб (извод) за $t = 2\pi/3$.

Овде је $dx/dt = 1 - \cos t$ и $dy/dt = \sin t$, па је $y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$. Даље је $x(2\pi/3) = 3/2$ и $y'(3/2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Наћи нагиб тангенте у тачки $(2, -1)$ криве $2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$.

Диференцирањем дате једначине добијамо $2y' - 2x - 3y^2y' = 0$, тј. $y' = \frac{2x}{2-3y^2}$. За $x = 2$ и $y = -1$ добијамо $y' = -4$, па је нагиб тангенте у датој тачки -4.

5. У којим тачкама криве $xy = (1 - x + y)^2$ су тангенте паралелне y-оси?

Да би тангенте биле паралелне $y-$оси (вертикалне), извод у тим тачкама мора бити бесконачан. Диференцирањем дате једначине налазимо
$$y + xy' = 2(1 - x + y)(-1 + y'), \quad \text{одакле је} \quad y' = \frac{8x - 5y + 4}{5x - 2y + 2}.$$
Ако су тражене тачке облика (a, b), мора да важи $5a - 2b + 2 = 0$ и $ab = (1 - a + b)^2$, па решавањем овог система добијамо тачке $(0, 1)$ и $\left(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}\right)$.

6. Наћи домен и асимптоте функције
$$\text{а) } y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}, \quad \text{б) } y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1.$$

а) Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Видимо да је
$$\lim_{x \to 0\pm} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = \pm\infty,$$
па је права $x = 0$ вертикална асимптота. Даље је
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = -1,$$
тј. права $y = -1$ је хоризонтална асимптота кад $x \to -\infty$. Слично је
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2^{-x}}{1 - 2^{-x}} = 1,$$
па је права $y = 1$ хоризонтална асимптота кад $x \to \infty$.

б) Домен ове функције је $\frac{x^3}{x+1} \geqslant 0$, тј. $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. Права $x = -1$ је вертикална асимптота, јер је
$$\lim_{x \to -1-} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 = \infty.$$
Да бисмо одредили понашање функције кад $x \to \pm\infty$, можемо користити Маклоренов полином функције $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ кад $t \to 0$:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(x\left(1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) + x - 1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2x - \frac{3}{2} + o(1)\right),$$

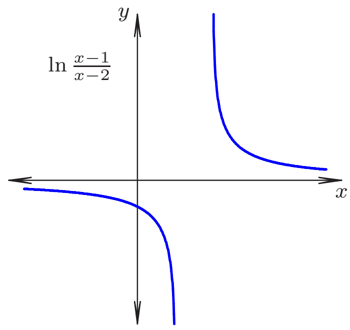
па је права $y = 2x - \frac{3}{2}$ коса асимптота кад $x \to \infty$. Слично,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}+x-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1-\frac{1}{2(x+1)}+o\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)+x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right),$$

па је права $y = -\frac{1}{2}$ хоризонтална асимптота кад $x \to -\infty$.

7. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln\frac{x-1}{x-2}$.

Домен функције је $\frac{x-1}{x-2} > 0$, тј. $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. Даље је $f(x) \geqslant 0$ за $\frac{x-1}{x-2} \geqslant 1$, тј. за $\frac{1}{x-2} \geqslant 0$.



Следи да $f(x)$ нема нула, негативна је за $x < 1$ и позитивна за $x > 2$.

Функција има вертикалну асимптоту за $x = 1$ (са леве стране) и за $x = 2$ (са десне стране), јер је $\lim_{x\to1-} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to2+} f(x) = \infty$. Права $x = 0$ је хоризонтална асимптота, јер је $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.

Први извод је $f'(x) = -1/(x^2 - 3x + 2)$, па функција нема екстремних вредности и опада на домену.

Други извод је $f''(x) = (2x-3)/((x-1)^2(x-2)^2)$, па функција нема превојних тачака ($x = 3/2$ је ван домена), конкавна је за $x < 1$ и конвексна за $x > 2$.

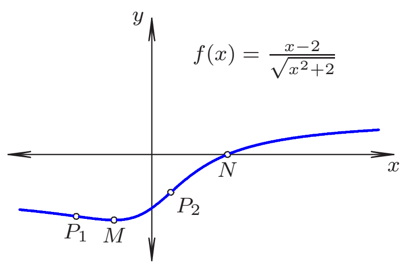
8. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$.

Домен функције $f(x)$ је цео скуп $\mathbb{R}$, јер је $x^2+2 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$; једина нула је тачка $N(2, 0)$. Да бисмо проверили да ли дата функција има асимптоте, посматрамо лимес

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{|x|\sqrt{1+2/x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2/x}{\operatorname{sgn}x\sqrt{1+2/x^2}}=\pm1,$$

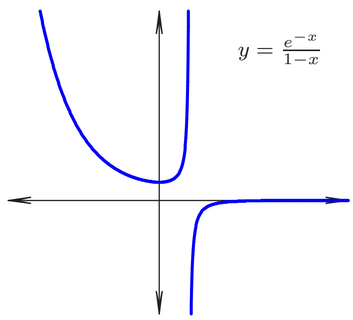
па $f(x)$ има хоризонталу асимптоту $y = 1$ кад $x \to \infty$, односно $y = -1$ кад $x \to -\infty$.

Први извод је $f' = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2)^{3/2}}$, па је $f' < 0$ за $x < -1$ и ту функција опада, $f' > 0$ за $x > -1$ и ту функција расте, а тачка $M(-1, -\sqrt{3})$ локални минимум функције.



Други извод је $f'' = \dfrac{-4x^2-6x+4}{(x^2+2)^{5/2}} = -\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+2)^{5/2}}$. Дакле, $f'' < 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (1/2, \infty)$ и ту је функција конкавна, $f'' > 0$ за $x \in (-2, 1/2)$ и ту је функција конвексна; превојне тачке су $P_1(-2, -2\sqrt{2/3})$ и $P_2(1/2, -1)$.

9. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.



Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f > 0$ за $x < 1$ и $f < 0$ за $x > 1$. Функција нема нула, није ни парна ни непара. Права $x = 1$ је вертикална асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to1\pm} f(x) = \mp\infty$.

Даље је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, па је права $y = 0$ хоризонтална асимптота кад $x \to \infty$.

Први извод је $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$, па функција опада за $x < 0$, расте за $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и има минимум у тачки $M(0, 1)$.

Други извод је $f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2+1)}{(1-x)^3}$, па је функција конвексна за $x < 1$ и конкавна за $x > 1$.

10. Испитати ток и скицирати график функције

а) $y = (2x-1)e^{-1/x}$, б) $y = \dfrac{\ln^2(x-2)}{x-2}$, в) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)}$, г) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$, д) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$,

ђ) $y = x - 1 - \sqrt{x^2 - x}$.

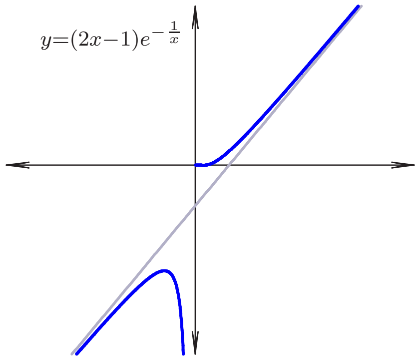
а) Домен функције је $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, нула функције је $N(1/2,0)$, $y<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/2)$ и $f(x)>0$ за $x\in(1/2,\infty)$. Права $x=0$ је вертикална асимптпта са леве стране, јер је

$$\lim_{x\to 0+} y(x)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0-} y(x)=-\infty.$$

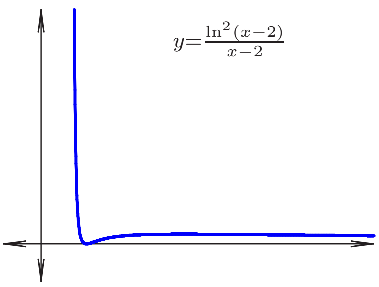
Кад $x\to\pm\infty$ можемо користити Маколренов развој $e^t=1+t+o(t)$ кад $t\to 0$:

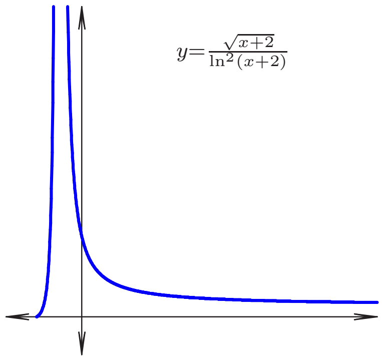
$$\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)e^{-1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(2x-3+o(1)),$$

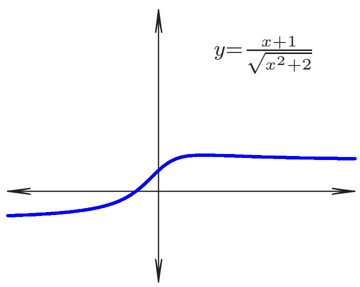
па је права $y=2x-3$ коса асимптота кад $x\to\pm\infty$.

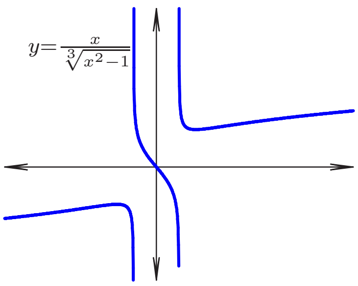


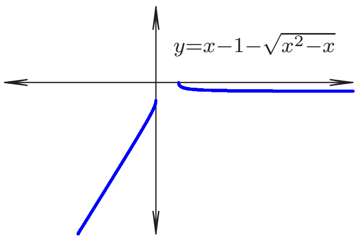
Даље је $y'(x)=e^{-1/x}\frac{2x^2+2x-1}{x^2}$, па $y\nearrow$ за $x\in(-\infty,-(1+\sqrt{3})/2)\cup((\sqrt{3}-1)/2,\infty)$ и $y\searrow$ за $x\in(-(1+\sqrt{3})/2,0)\cup(0,(\sqrt{3}-1)/2)$. Тачка $(-(1+\sqrt{3})/2, y(-(1+\sqrt{3})/2))$ је локални максимум функције, а тачка $((\sqrt{3}-1)/2, y(\sqrt{3}-1)/2))$ је локални минимум функције. Други извод је $y''=e^{-1/x}\frac{4x-1}{x^4}$, па је y конкавна за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/4)$ и конвексна за $x\in(1/4,\infty)$. Функција има превој у тачки $(1/4,y(1/4))$.











11. Апроксимирати функцију $\ln(1+x-x^2)$ Маклореновим полиномом четвртог степена.

Користимо познати развој $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+o(t^4)$ кад $t\to 0$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x-x^2)&=x-x^2-\frac{(x-x^2)^2}{2}+\frac{(x-x^2)^3}{3}-\frac{(x-x^2)^4}{4}+o\left((x-x^2)^4\right)\\&=x-x^2-\frac{1}{2}\left(x^2-2x^3+x^4\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-3x^4\right)-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\&=x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{4}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

12. Развити у Маклоренов полином петог степена функцију $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

На основу формуле $x^5-1=(x-1)(1+x^2+x^3+x^4)$ је $\ln(1+x^2+x^3+x^4)=\ln(1-x^5)-\ln(1-x)$. Сада користимо Маклорнов полином $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)$ кад $x\to 0$, па је тражени полином

$$T_5(x)=-x^5+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}.$$

13. Апроксимирати функцију

$$y=(x^2-1)e^{-2x}$$

Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу $[0,1]$.

Првих пет извода су $y'(x) = -2e^{-2x}(x^2-x-1)$, $y''(x) = 2e^{-2x}(2x^2-4x-1)$, $y'''(x) = -4e^{-2x}(2x^2-6x+1)$, $y^{(4)}(x) = 16e^{-2x}(x^2-4x+2)$ и $y^{(5)}(x) = -32e^{-2x}(x^2-5x+4)$. Даље је $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = -4$ и $y^{(4)}(0) = 32$, па је Маклоренов полином четвртог степена

$$T_4(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^4(0)}{4!}x^4, \quad \text{тј.} \quad T_4(x) = -1 + 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4.$$

Грешка апроксимације је

$$R_4(x) = \frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5, \quad \text{за} \quad t \in (0,x), \quad \text{при чему је} \quad x \in [0,1].$$

За оцену грешке, нађимо максимум функције $|y^{(5)}(t)|$ за $t \in (0,1)$ и узимамо да је x=1:

$$\max_{t\in(0,1)} |-32e^{-2t}(t^2-5t+4)| < 32e^0 \cdot 4 = 128, \quad \text{па је} \quad |R_4(1)| < \frac{16}{15} \quad \text{за} \quad x \in [0,1].$$

14. Апроксимирати функцију

$$y = \sqrt[5]{2x-1}$$

Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке $a = 1$. Користећи овај полином приближно израчунати $\sqrt[5]{1,1}$ и проценити грешку.

Прва четири извода су $y'(x) = \frac{2}{5}(2x-1)^{-4/5}$, $y''(x) - \frac{16}{25}(2x-1)^{-9/5}$, $y'''(x) = \frac{288}{125}(2x-1)^{-14/5}$ и $y^{(4)}(x) = -8064/625(2x-1)^{-19/5}$. Тејлоров полином трећег степена у тачки $a = 1$ је

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3, \quad \text{тј.}$$
$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{8}{25}(x-1)^2 + \frac{48}{125}(x-1)^3.$$

Даље је $y(1,1) \approx T_3(1,1) = 1,037184$. За $1 < t < 1,1$ је $(2t-1)^{-19/5} < 1$, па је

$$|R_3(1,1)| < \frac{1}{4!}\frac{8064}{625} \cdot 0,1^4 \approx 5,4 \cdot 10^{-5}.$$

15. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $y = y(x)$ дату једначином $x + y = \operatorname{arctg}(xy)$.

Прво приметимо да је $y = 0$ за $x = 0$. Диференцирањем дате једначине (по x) добијамо

$$1 + y' = \frac{y + xy'}{1+(xy)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ добијамо $y'(0) = -1$. Даљим диференцирањем добијамо

$$y'' = \frac{(y' + y' + xy'')(1+(xy)^2) - (y+xy')2xy(y+xy')}{(1+(xy)^2)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ и $y'(0) = -1$ добијамо $y''(0) = -2$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x) = -x - x^2$.

16. Наћи елементе природног триедра у тачки $t = 0$ хodографа вектор функције $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{\imath} + e^{-t}\vec{\jmath} + \sqrt{2}t\vec{k}$.

Налазимо $\dot{\vec{r}}(t) = (-e^{-t}, e^t, \sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(t) = (e^{-t}, e^t, 0)$, па је $\dot{\vec{r}}(0) = (-1,1,\sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (1,1,0)$ и $\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$. Дакле, $\vec{\tau} = \frac{1}{2}(-1,1,\sqrt{2})$, $\vec{b} = \frac{1}{2}(-1,1,-\sqrt{2})$ и $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{2}(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$. Нормална π_τ, ректификациона π_n и оскулаторна раван π_b су нормалне на тангенту, нормалу и бинормалу, редом, и садрже тачку $(1,1,\sqrt{2})$, па су њихове једначине $\pi_\tau : -x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$, $\pi_n : x + y - 2 = 0$, $\pi_b : -x + y - \sqrt{2}z + 2 = 0$.

17. Наћи тачку на кривој $\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ за $t > 0$ у којој је кривина екстремална.

Налазимо $\dot{\alpha}(t) = \left(1, -t^{-2}, -t^{-2}-1\right)$, $\ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(0,1,1)$ и $\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(1,-1,1)$. Даље је $|\dot{\alpha}(t)| = t^{-2}\sqrt{2(t^4+t^2+1)}$ и $|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)| = 2\sqrt{3}|t^{-3}|$, па је $K = \frac{\sqrt{6}|t|^3}{2(t^4+t^2+1)^{3/2}}$. Да бисмо нашли тачку у којој је кривина екстремална, нађимо њен први извод: за $t > 0$ је $K' = -\frac{3x^2(x^4-1)}{(t^4+t^2+1)^{5/2}}$ и максимум се ту постиже за $t = 1$, $K(1) = 1/(3\sqrt{2})$. Дакле, тражена тачка је $(1,2,0)$.

rmutavdzic@mas.bg.ac.rs