

Нумеричко решавање нелинеарних једначина

Метода сечице (Метода regula falsi) и Њутнова метода тангенте

Примењују се на решавање једначине облика $f(x) = 0$ на неком коначном интервалу $[a, b]$ таквом да су вредности функције у крајевима тог интервала, $f(a)$ и $f(b)$, међусобно различитог знака ($f(a) \cdot f(b) < 0$), при чему је такође неопходно да су и први и други извод функције $f(x)$ сталног знака на интервалу $[a, b]$ на којем се поступак спроводи и то:

1) уколико је f растућа ($f'(x) > 0$ за $x \in [a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$) и конвексна ($f''(x) > 0$ за $x \in [a, b]$) **или** опадајућа ($f'(x) < 0$ за $x \in [a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$) и конкавна ($f''(x) < 0$ за $x \in [a, b]$), тада се у Методи regula falsi за почетну итерацију узима $x_0 = a$, док се у Методи тангенте за почетну итерацију узима $x_0 = b$;

2) уколико је f растућа ($f'(x) > 0$ за $x \in [a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$) и конкавна ($f''(x) < 0$ за $x \in [a, b]$) **или** опадајућа ($f'(x) < 0$ за $x \in [a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$) и конвексна ($f''(x) > 0$ за $x \in [a, b]$), тада се у Методи regula falsi за почетну итерацију узима $x_0 = b$, док се у Методи тангенте за почетну итерацију узима $x_0 = a$.

Последње се много лакше памти са слике, погледати како је то цртано на предавању.

У обе методе наредна итерација зависи само од претходне и то код Методе regula falsi по правилу

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{b - x_{k-1}}{f(b) - f(x_{k-1})}$$

у случају (1) ($x_0 = a$),
по правилу

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{a - x_{k-1}}{f(a) - f(x_{k-1})}$$

у случају (2) ($x_0 = b$),
док се код Њутнове методе тангенте итеративни корак увек спроводи по правилу

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

Њутнова метода тангенте брже конвергира од Методе сечице. Тачније, Метода regula falsi конвергира линеарно (ред конвергенције једнак 1), док Њутнова метода тангенте конвергира квадратно (ред конвергенције једнак 2). **Погледати како је на предавањима дефинисан ред конвергенције неке нумеричке методе!** Наћи решење једначине $f(x) = 0$ са тачношћу 10^{-e} значи итерирати одговарајући поступак док се последње две итерације не поклопе на e места иза децималног зареза.

Пример 1. Илуструјмо примену обе ове методе на решавању једначине $x(x^4 + 5) = -1$ са тачношћу 10^{-4} .

Прво дату једначину презаписујемо у одговарајућем облику, односно $f(x) = x^5 + 5x + 1 = 0$. Како $x(x^4 + 5)$ може бити негативно само за $x < 0$, поступак ће се очито на x -оси спроводити лево од 0. Важи $f(0) = 1 > 0$, а већ за -1 имамо $f(-1) = -5 < 0$. Чак штавише, да би за неко негативно x било $x^5 + 5x + 1 < 0$, довољно је да $5x + 1$ не буде веће од 0, па можемо узети $a = -0.2$ и $b = 0$. Даље је $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$ и $f''(x) = 20x^3 < 0$ за $x < 0$, закључујемо да се ради о случају 2) из теоријског разматрања. Стога у случају примене Методе Regula falsi узимамо

$x_0 = 0$ за почетну итерацију, док у случају примене Њутнове методе тангенте узимамо $x_0 = -0.2$. Итеративни корак за Методу regula falsi гласи

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{-0.2 - x_{k-1}}{f(-0.2) - f(x_{k-1})} \\ &= x_{k-1} - \frac{(x_{k-1}^5 + 5x_{k-1} + 1)(-0.2 - x_{k-1})}{-0.00032 - (x_{k-1}^5 + 5x_{k-1} + 1)} \\ &= x_{k-1} - \frac{(x_{k-1}^5 + 5x_{k-1} + 1)(0.2 + x_{k-1})}{x_{k-1}^5 + 5x_{k-1} + 1.00032}, \end{aligned}$$

док за Њутнову методу тангенте итеративни корак гласи

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^5 + 5x_{k-1} + 1}{5x_{k-1}^4 + 5}.$$

У оба случаја се добије $x_1 = x_2 = -0.1999$, што фактички значи да је већ у првој итерацији добијено решење са задатом тачношћу. Да смо узели мало шири полазни интервал, нпр. $[-1, 0]$, било би потребно спровести мало више итерација, али би итеративни процес опет текао релативно брзо (брже, наравно, Њутновом методом тангенте).

Задатак за вежбу: Једначину $x^3 + x = 60$, која је на вежбама решавана Методом половљења интервала и Методом просте итерације (**проучити та два решења обавезно**), пробајте да решите овим двома методама.

Пример 2. Једначину $x = \cos x$ решити применом:

а) Методе регула фалси са тачношћу 10^{-4} ; б) Њутнове методе тангенте са тачношћу 10^{-6} .

Решење: Имамо једначину $f(x) = x - \cos x = 0$. Важи $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, што значи да је дата функција растућа. Важи $f(0) = -1$, док ће $f(1)$ већ бити позитивно (1 је сигурно веће од сваког косинуса), тако да можемо узети $a = 0$ и $b = 1$ (могло је исто $b = \pi/2$ - мало само више посла). Други извод $f''(x) = \cos x$ је позитиван на интервалу $(0, 1)$, тако да се ради о растућој конвексној функцији, односно случају 1) из теоријског разматрања. Дакле, Метода regula falsi ће гласити:

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad x_k &= x_{k-1} - f(x_{k-1}) \frac{1 - x_{k-1}}{f(1) - f(x_{k-1})} = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - \cos x_{k-1})(1 - x_{k-1})}{1 - \cos 1 - x_{k-1} + \cos x_{k-1}} \\ &= x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - \cos x_{k-1})(1 - x_{k-1})}{0.4597 - x_{k-1} + \cos x_{k-1}}. \end{aligned}$$

Добија се $x_1 = 0.6851$, $x_2 = 0.7363$, $x_3 = 0.7389$, $x_4 = 0.7391 = x_5$.

Њутнова метода тангенте ће гласити:

$$x_0 = 1, \quad x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1} - \cos x_{k-1}}{1 + \sin x_{k-1}}.$$

Добија се $x_1 = 0.750364$, $x_2 = 0.739133$, $x_3 = 0.739085 = x_4$.

Видимо да је мањи број корака спроведен Њутновом методом дао резултат прецизнији чак за 2 децимале!

Напомена: Имати у виду да $\cos 1$ није "косинус од 1 степен" него "косинус од 1 радијан", пошто се испоставило приличан број студената то меша.