9. Крива као траг векторске функције

Дефиниција 9.1. *Векторска функција у простору* $\mathbb{R}^3$ *је функција облика*

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

где су $x(t)$, $y(t)$ *и* $z(t)$ *координате функције. Њен траг (или ходограф) је скуп свих крајева вектора* $\vec{r}(t)$.

Извод функције $\vec{r}(t)$ по t је $\vec{r}'(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Слично се налазе други извод $\vec{r}''(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$ и трећи извод $\vec{r}'''(t) \equiv \dddot{\vec{r}}(t)$.

Важни су нам следећи јединични вектори у тачки $A = \vec{r}(t_0)$:

- вектор *тангетне* $\vec{\tau} = \dfrac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$,
- вектор *бинормале* $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$ и
- вектор *нормале* $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}$.

Вектори $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ не зависе од параметризације криве, већ само од њене оријентације. Такође, они чине ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ (вектори су јединични и ортогонални међу собом) и образују (покретни) природни триједар криве. Ова база зависи од тачке $A = \vec{r}(t_0)$ у којој се рачунају вектори.

Дакле, природни триедар чини тројка вектора $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ и његовим елеметима сматрамо и три придружене равни:

- *оскулаторну* $(\perp \vec{b})$,
- *нормалну* $(\perp \vec{\tau})$ и
- *ректификациону* $(\perp \vec{n})$.

На крају су дате формуле за *кривину* K и *торзију* Т криве $\vec{r}(t)$ у датој тачки $A = \vec{r}(t_0)$:

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \qquad T = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

Полупречник кривине је $R_K = 1/K$, а полупречник торзије је $R_T = 1/T$. Вектори кривине и торзије су редом вектори $\vec{K} = K\vec{n}$ и $\vec{T} = -T\vec{n}$.

Кривина криве мери одступање криве од праве линије (тангенте), а торзија мери одступање криве од раванске криве (криве у оскулаторној равни). Следи да је крива раванска уколико је њена торзија нула, односно уколико је вектор бинормале константан у свакој тачки криве.

9.1. Задаци

1. Наћи елементе природног триедра у тачки $t = 0$ ходографа вектор функције $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{\imath} + e^{-t}\vec{\jmath} + \sqrt{2}t\vec{k}$.

   Налазимо $\dot{\vec{r}}(t) = (-e^{-t}, e^t, \sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(t) = (e^{-t}, e^t, 0)$, па је $\dot{\vec{r}}(0) = (-1, 1, \sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (1, 1, 0)$ и $\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$. Дакле, $\vec{\tau} = \frac{1}{2}(-1, 1, \sqrt{2})$, $\vec{b} = \frac{1}{2}(-1, 1, -\sqrt{2})$ и $\vec{n} = \vec{b}\times\vec{\tau} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. Нормална π_τ, ректификациона π_n и оскулаторна раван π_b су нормалне на тангенту, нормалу и бинормалу, редом, и садрже тачку $(1, 1, \sqrt{2})$, па су њихове једначине $\pi_\tau : -x+y+\sqrt{2}z-2 = 0$, $\pi_n : x+y-2 = 0$, $\pi_b : -x+y-\sqrt{2}z+2 = 0$.

2. Наћи тачку на кривој $\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ за $t > 0$ у којој је кривина екстремална.

   Налазимо $\dot{\alpha}(t) = (1, -t^{-2}, -t^{-2} - 1)$, $\ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(0, 1, 1)$ и $\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(1, -1, 1)$. Даље је $|\dot{\alpha}(t)| = t^{-2}\sqrt{2(t^4 + t^2 + 1)}$ и $|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)| = 2\sqrt{3}|t^{-3}|$, па је

$$K = \frac{\sqrt{6}|t|^3}{2(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

   Да бисмо нашли тачку у којој је кривина екстремална, нађимо њен први извод: за $t > 0$ је

$$K' = -\frac{3x^2(x^4 - 1)}{(t^4 + t^2 + 1)^{5/2}}$$

   и максимум се ту постиже за $t = 1$, $K(1) = 1/(3\sqrt{2})$. Дакле, тражена тачка је $(1, 2, 0)$.

3. Проверити да ли је крива $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$ планарна.

   Крива је планарна (лежи у равни) ако је њена торзија једнака нули у свакој тачки. Дакле, треба наћи

$$T = \frac{[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2}.$$

   Налазимо

$$\dot{\alpha}=\left(-\sin t, \cos t, \cos\frac{t}{2}\right),\ \ddot{\alpha}=\left(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right),\ \dddot{\alpha}=\left(\sin t, -\cos t, -\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}\cos t\sin\frac{t}{2} + \sin t\cos\frac{t}{2}, -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\sin t - \cos\frac{t}{2}\cos t, 1\right),$$

$$|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}| = \frac{\sqrt{6\cos t + 26}}{4},\ (\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \dddot{\alpha} = \frac{3}{4}\cos\frac{t}{2},\ T = \frac{6\cos\frac{t}{2}}{3\cos t + 13}.$$

   Како торзија није индентички једнака нули, крива није планарна.

rmutavdzic@mas.bg.ac.rs