

## 8. Tajlorov i maklorenov polinom

### 8.1. Značajni pojmovi i objašnjenja

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \mathbf{R}_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} + \mathbf{R}_n(x), \text{ važi za } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{R}_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \mathbf{R}_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} + \mathbf{R}_n(x), \text{ važi za } -1 < x \leq 1 \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\mathbf{R}_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathbf{R}_{2n+1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} + \mathbf{R}_{2n+1}(x), \text{ važi za } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{R}_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1 \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{R}_{2n+2}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \mathbf{R}_{2n+2}(x), \text{ važi za } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\mathbf{R}_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\left(\theta x + (2n+2) \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1 \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \mathbf{R}_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{\alpha}{i} x^i + \mathbf{R}_n(x), \text{ važi za } x \in (-1, 1) \text{ i } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\mathbf{R}_n(x) = \binom{\alpha}{n} (1+\theta x)^{\alpha-n} x^n, \quad 0 < \theta < 1 \quad (8.10)$$

## 8.2. Rešeni zadaci

**Primer 8.1.** Naći maklorenov polinom 5-tog stepena funkcije:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

Koristeći dobijeni rezultat izračunati  $f(1)$  i oceniti grešku.

*Dokaz.* Ako se analizira data funkcija:

$$f(x) = x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

može se uočiti da je dovoljno razvijati jedan njen deo  $g(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$  i to do maklorenovog polinoma 4-tog stepena. Data funkcija se sastoji od polinoma prvog stepena  $x$  koji množi  $g(x)$ . Ako polinom prvog stepena pomnoži razvitak funkcije  $g(x)$  u maklorenov polinom 4-tog stepena, dobijamo traženi razvitak. Ako iskoristimo (8.9) i (8.10) razvitak funkcije  $g(x)$  je:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{i} (x^2)^i + \mathbf{R}_n(x^2)$$

važi za  $|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1$ , uz napomenu da gornja granica sume nije određena. Određuje se na taj način što se konroliše zahtev za stepenom polinoma, u ovom slučaju traži se da se razvije do 4-tog stepena:

$$g(x) = \binom{-\frac{1}{3}}{0} (x^2)^0 + \binom{-\frac{1}{3}}{1} (x^2)^1 + \binom{-\frac{1}{3}}{2} (x^2)^2$$

Kako je:

$$\binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{2}{9}$$

konačno se može napisati:

$$g(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + \mathbf{R}_3(x^2)$$

Ako je:

$$\binom{-\frac{1}{3}}{3} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)}{6} = -\frac{14}{81}$$

Greška je:

$$\mathbf{L}_3(x) = \mathbf{R}_3(x^2) = \binom{-\frac{1}{3}}{3} (1+\theta x^2)^{-\frac{1}{3}-3} (x^2)^3 = -\frac{14}{81} (1+\theta x^2)^{-\frac{10}{3}} x^6 = -\frac{14}{81} \frac{x^6}{(1+\theta x^2)^{\frac{10}{3}}}$$

gde je  $0 < \theta < 1$ . Konačno za  $|x| < 1$ :

$$f(x) = x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + \mathbf{L}_3\right) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^5 + \mathbb{L}_3$$

gde je greška:

$$\mathbb{L}_3(x) = -\frac{14}{81} \frac{x^7}{(1 + \theta x^2)^{\frac{10}{3}}}, \quad 0 < \theta < 1$$

Razvitak funkcije se ne može koristiti za računanje  $f(1)$  jer razvoj važi za  $|x| < 1$ . □

Prethodni zadatak je zanimljiv jer se greška može proceniti, i na sledeći način:

$$|\mathbb{L}_3(x)| = \left| -\frac{14}{81} \frac{x^7}{(1 + \theta x^2)^{\frac{10}{3}}} \right| = \frac{14}{81} \left| \frac{x^7}{(1 + \theta x^2)^{\frac{10}{3}}} \right| = \frac{14}{81} \frac{|x|^7}{|1 + \theta x^2|^{\frac{10}{3}}}$$

Kako je  $0 < \theta < 1$  izaberimo za  $\theta = 0$  jer je tada:

$$|\mathbb{L}_3(x)| \leq \frac{14}{81} \frac{|x|^7}{|1 + 0 \cdot x^2|^{\frac{10}{3}}} \Rightarrow |\mathbb{L}_3(x)| \leq \frac{14}{81} |x|^7$$

Izračunajmo, na primer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  najpre „tačno“, kalkulatorom, a zatim i razvitkom:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.464158883$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{32} = 0.465277778$$

a apsolutna greška je  $\left| \mathbb{L}_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 0.001350309$ .

**Primer 8.2.** Naći maklorenov polinom 6-tog stepena funkcije:

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Koristeći dobijeni rezultat izračunati  $\ln 1.01$  i oceniti grešku.

*Dokaz.* Ako iskoristimo (8.3) i (8.4) tada je:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(x^2)^i}{i} + \mathbf{R}_n(x^2)$$

gde razvoj važi za  $-1 < x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ . Kako nam treba polinom 6-tog stepena:

$$f(x) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \mathbf{R}_4(x^2)$$

gde je:

$$\mathbf{L}_4(x) = \mathbf{R}_4(x^2) = (-1)^{4+1} \frac{(x^2)^4}{4(1 + \theta x^2)^4} = -\frac{x^8}{4(1 + \theta x^2)^4}, \quad 0 < \theta < 1$$

Konačno za  $-1 \leq x \leq 1$  traženi maklorenov polinom:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \mathbb{L}_4(x)$$

gde je:

$$\mathbb{L}_4(x) = -\frac{x^8}{4(1 + \theta x^2)^4}, \quad 0 < \theta < 1$$

Kako je:

$$\ln 1.01 = \ln(1 + 0.1^2) \Rightarrow f(0.1) = \ln 1.01$$

sledi:

$$f(0.1) = 0.1^2 - \frac{0.1^4}{2} + \frac{0.1^6}{3} = 0.009950333$$

dok je „tačna” vrednost  $\ln 1.01 = 0.009950331$ . Apsolutna greška jednaka je:

$$|\mathbb{L}_4(x)| = \left| -\frac{x^8}{4(1+\theta x^2)^4} \right| = \frac{x^8}{4(1+\theta x^2)^4}$$

Kako je  $0 < \theta < 1$  izaberimo za  $\theta = 0$  jer je tada:

$$|\mathbb{L}_4(x)| \leq \frac{x^8}{4} \Rightarrow |\mathbb{L}_4(0.1)| \leq 0.000000002$$

□

**Primer 8.3.** Naći maklorenov polinom  $n$ -tog stepena funkcije:

$$g(x) = x^2 \ln(1+x)$$

Koristeći dobijeni rezultat izračunati  $g(0.1)$  i oceniti grešku.

**Primer 8.4.** Naći maklorenov polinom  $n$ -tog stepena funkcije:

$$g(x) = (1+3x) \ln(1+3x)$$

Izračunati  $\ln 2$  sa greškom manjom od  $\frac{1}{50}$ .

**Primer 8.5.** Naći maklorenov polinom stepena 3 funkcije:

$$g(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$$

Izračunati  $\ln 2$  i proceniti grešku.