Математика 1 - Други колоквијум (смене 1 и 9)
30.12.2022.
Група 1

(Задатак из градива за Први колоквијум)
а) Одредити вредност реалног параметра a тако да крива $x^2 + axy + ay^2 - 2x + 2ay + a = 0$ дефинише параболу, а затим је свести на канонски облик (и, наравно, скицирати). Одредити координате њеног темена у координатном систему Oxy.
б) Решити матричну једначину $(AX^{-1} - B)^{-1} = XB$ за дате матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Одредити угао који крива $y = f_1(x)$ дата са $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$ заклапа за правом $y = x$, као и $d^2 f_1/dx^2$ у тачки њиховог пресека. Коначно, наћи угао који ова крива заклапа са кривом $y = f_2(x)$ датом са $cos(xy) = 2^{-\frac{x^2}{y^2}}$ у бар једној њиховој заједничкој тачки и наћи $d^2 f_2/dx^2$ у таквој тачки.

2. а) Детаљно испитати и скицирати функцију $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-3}} - x$.

   б) Написати у Тејлорове полиноме 2.степена функције f у околини тачке -1, као и 5.степена у околини тачака $+\infty$ и $-\infty$ редом (напомена: x тежи ка $\pm\infty$ акко $\frac{1}{x}$ тежи $0^{\pm}$).

3. Тело облика квадра без поклопца треба да има запремину $96m^3$, при чему основне ивице треба да му буду у односу $1:2$. Када ће површина тог тела бити највећа могућа и колико износи та површина?

4. Наћи
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$
   Да ли овај израз у тачки $x = 0$ има граничну вредност?

5. а) Одредити једначине тангенте, нормале и бинормале криве
$$C:\ \vec{r}(t) = e^t \sin t\,\vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}$$
   у тачки $A(0,1,1)$, као и вредности флексије и торзије у истој.

   б) Доказати да ова крива лежи на конусу $x^2 + y^2 = z^2$.

   в) Описати све криве $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, такве да је за свако t из њиховог домена $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$.

СРЕЋНО!!!

Математика 1 - Други колоквијум (смене 1 и 9)
30.12.2022.
Група 2

(Задатак из градива за Први колоквијум)
а) Одредити вредност реалног параметра a тако да крива $x^2 - axy - ay^2 - 2x - 2ay - a = 0$ дефинише параболу, а затим је свести на канонски облик (и, наравно, скицирати). Одредити координате њеног темена у координатном систему Oxy.
б) Решити матричну једначину $(AX^{-1} - B)^{-1} = XB$ за дате матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Одредити угао који крива $y = f_1(x)$ дата са $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$ заклапа за правом $y = x$, као и $d^2 f_1/dx^2$ у тачки њиховог пресека. Коначно, наћи угао који ова крива заклапа са кривом $y = f_2(x)$ датом са $cos(xy) = 2^{-\frac{y^2}{x^2}}$ у бар једној њиховој заједничкој тачки и наћи $d^2 f_2/dx^2$ у таквој тачки.

2. а) Детаљно испитати и скицирати функцију $f(x) = x - \sqrt{\frac{x^3}{x-3}}$.

   б) Написати у Тејлорове полиноме 2.степена функције f у околини тачке -1, као и 5.степена у околини тачака $+\infty$ и $-\infty$ редом (напомена: x тежи ка $\pm\infty$ акко $\frac{1}{x}$ тежи $0^{\pm}$).

3. Тело облика квадра без поклопца треба да има запремину $108 m^3$, при чему основне ивице треба да му буду у односу $1 : 2$. Када ће површина тог тела бити највећа могућа и колико износи та површина?

4. Наћи
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctgx \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$
   Да ли овај израз у тачки $x = 0$ има граничну вредност?

5. а) Одредити једначине тангенте, нормале и бинормале криве
$$C: \vec{r}(t) = e^t \cos t \, \vec{i} + e^t \sin t \, \vec{j} + e^t \, \vec{k}$$
   у тачки $A(1, 0, 1)$, као и вредности флексије и торзије у истој.

   б) Доказати да ова крива лежи на конусу $x^2 + y^2 = z^2$.

   в) Описати све криве $\vec{r}(t) = x(t)\, \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t)\, \vec{k}$, такве да је за свако t из њиховог домена $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$.

СРЕЋНО!!!