4. Prava, ravan, krive

Sve izlagano u ovoj glavi odnosi se na prostor E_3, što znači da radim o u Euklidskom prostoru, gde je prisutna paralelnost. Podrazumeva se da je sa:

$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ obeležena tačka sa poznatim (datim) koordinatama - *fiksirana tačka*,

$M\left(X, Y, Z\right)$ obeležena tačka sa proizvoljnim koordinatama - *proizvoljna tačka*,

$$d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2}$$

dato *rastojanje između tačaka* $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ i $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$.

4.1. Ravan

Ravan je određena sa:

I) tri tačke,

II) dve paralelne prave, (jedna tačka sa jedne prave i dve sa druge),

III) pravom i tačkom, i (dve tačke sa prave i data tačka),

IV) dve prave koje se seku (tačka preseka i po jedna tačka sa svake prave).

Svaki od navedenih slučajeva svodi se na zadavanje ravni sa tri nekolinearne tačke

$$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right), A\left(x_1, y_1, z_1\right), B\left(x_2, y_2, z_2\right) \tag{4.1}$$

Od datih tačaka možemo formirati vektore:

$$\overrightarrow{M_0A} = \left(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\right), \qquad \overrightarrow{M_0B} = \left(x_0 - x_2, y_0 - y_2, z_0 - z_2\right) \tag{4.2}$$

Ovi vektori karakterišu ravan, jer se njihovom linearnom kombinacijom dobija bilo koji vektor ravni Π. Od njih možemo dobiti dva vektora, njihov vektorski proizvod. Bez umanjenja opštosti neka je:

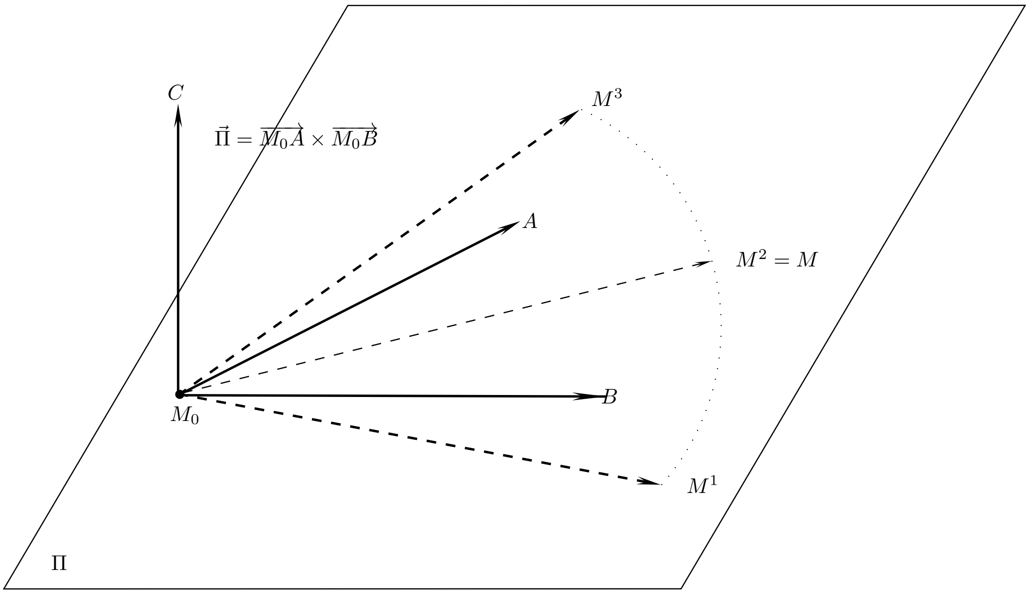
$$\overrightarrow{AC} = \vec{\Pi} = \overrightarrow{M_0A} \times \overrightarrow{M_0B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x_0 - x_2 & y_0 - y_2 & z_0 - z_2 \end{vmatrix} = \left(A, B, C\right) \tag{4.3}$$

Vektor $\vec{\Pi}$ normalan je na bilo koji vektor ravni Π jer:

$$\vec{\Pi} \circ \left(\alpha \vec{M_0}A + \beta \vec{M_0}B\right) = \alpha \cdot \vec{\Pi} \circ \vec{M_0}A + \beta \cdot \vec{\Pi} \circ \vec{M_0}B = 0 \tag{4.4}$$

Na slici 1 prikazana je ortogonalnost vektora $\vec{\Pi}$ na ravan $\vec{\Pi}$, i ideju da se nađe tačka M koja će pripadati ravni Π. Otuda u razmišljanju o tački M, može se reći da se ona može pozicionirati „ispod" ravni, vidi tačku M^1, ili „iznad" ravni Π. Ako je M bilo koja tačka ravni Π sledi:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} \circ \overrightarrow{M_0M} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(A, B, C\right) \circ \left(X - x_0, Y - y_0, Z - z_0\right) = 0 && (4.5) \\ &\Rightarrow \quad A\left(X - x_0\right) + B\left(Y - y_0\right) + C\left(Z - z_0\right) = 0 && (4.6) \\ &\Rightarrow \quad AX + BY + CZ + D = 0 && (4.7) \end{aligned}$$



Slika 1: Ravan zadata sa tri nekolinearne tačke

Dobijenu jednačinu zovemo *opštom jednačinom ravni*. Važno je uočiti da za formiranje jednačine ravni potrebna *jedna tačka te ravni*, na slici 1 je to M_0, i vektor normalan na tu ravan, nazovimo ga - *vektor ravni*, na slici je to vektor $\vec{\Pi}$. U nastavku glave koristimo:

$$\Pi = \left\langle M_0, \vec{\Pi} \right\rangle$$

kao oznaku za ravan. Iz normalne jednačine ravni ednostavno dobijamo *segmentni oblik jednačine ravni*:

$$\begin{aligned} AX + BY + CZ + D = 0 &\Rightarrow AX + BY + CZ = -D \\ &\Rightarrow \frac{X}{-\frac{D}{A}} + \frac{Y}{-\frac{D}{B}} + \frac{Z}{-\frac{D}{C}} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1 \end{aligned}$$

gde su a, b, c, odsečci na odgovarajućim koordinatnim osama.

Neka je data ravan Π i prava Γ koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na Π. Tada $\Pi \cap \Gamma = \{P\}$ i neka je $p = \left|\overrightarrow{OP}\right|$. Jedinični vektor:

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OP}}{p}$$

ima koordinate $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Tačka $M\,(X, Y, Z)$ je u ravni Π ako i samo ako je algebarska vrednost ortogonalne projekcije vektora $\overrightarrow{OM}$ na osu Γ, orijentisanu sa $\vec{n}_0$, jednaka p. Sledi:

$$\overrightarrow{OM} \circ \vec{n}_0 = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = p$$

U suštini je p rastojanje koordinatnog početka od ravni a jednačina:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma - p = 0$$

je *normalni oblik jednačine ravni.*

4.2. Prava

Prava je određena sa dve tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i $A(x_1, y_1, z_1)$, od kojih dobijamo:

$$\overrightarrow{M_0A} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) = (\alpha, \beta, \gamma) = \overrightarrow{\Gamma} \tag{4.8}$$

Vektor koji leži na pravoj određenoj tačkama M_0A je linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{\Gamma}$ jer:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{\Gamma} \quad &\Rightarrow \quad (X - x_0, Y - y_0, Z - z_0) = t\cdot(\alpha, \beta, \gamma)\\
&\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} X & - & x_0 & = & t\cdot\alpha \\ Y & - & y_0 & = & t\cdot\beta \\ Z & - & z_0 & = & t\cdot\gamma \end{array}\\
&\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} X & = & x_0 & + & t\cdot\alpha \\ Y & = & y_0 & + & t\cdot\beta \\ Z & = & z_0 & + & t\cdot\gamma \end{array}
\end{aligned}$$

gde je M bilo koja tačka pravoj $\mathrm{M_0A}$. Dobijene jednačine nazivaju se *parametarskom jednačinom prave*, uz napomenu da razlomačka crta u jednačini ne znači delenje. Iz ovih jednačina može se dobiti i *normalni oblik jednačine* prave:

$$\frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

Slično kao ravan i pravu označavamo sa $\Gamma = \left\langle M_0, \overrightarrow{\Gamma}\right\rangle$, bez povećanja mogućnosti da se zameni sa nekom ravni. Prava može biti i zadata sa dve ravni koje se ne seku:

$$\begin{array}{ll} \Pi_1: & A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0 \\ \Pi_2: & A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0 \end{array}$$

i tada je prava data *opštim jednačinama.*

4.3. Odnos između dve ravni, dve prave, prave i ravni

4.3.1. Odnos dve ravni

Neka su date dve ravni $\Pi = \left\langle \Pi_0, \overrightarrow{\Pi}\right\rangle$, $\Sigma = \left\langle \Sigma_0, \overrightarrow{\Sigma}\right\rangle$:

I) ravni Π i Σ su *paralelne* ako je:

$$\Pi \parallel \Sigma \Leftrightarrow \overrightarrow{\Pi} \parallel \overrightarrow{\Sigma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Sigma}$$

II) ravni Π i Σ nisu paralelne, *seku se*, i presek je prava. Presečna prava se može dobiti na dva načina:

a) rešavanjem sistema od dve jednačine sa tri nepoznate,

b) nalaženjem vektora prave i tačke zajedničke prave.

Ugao između ravni jednak je uglu između vektora ravni.

4.3.2. Odnos dve prave

Neka su date dve prave $\Pi = \left\langle \Pi_0, \overrightarrow{\Pi} \right\rangle$, $\Sigma = \left\langle \Sigma_0, \overrightarrow{\Sigma} \right\rangle$:

I) prave su *paralelne* ako je $\Pi \parallel \Sigma \Leftrightarrow \overrightarrow{\Pi} \parallel \overrightarrow{\Sigma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{\Sigma}$,

II) prave se *seku* ako je $\overrightarrow{\Pi_0\Sigma_0} \circ \overrightarrow{\Pi} \times \overrightarrow{\Sigma} = 0$, i

III) prave su *mimoilazne* ako se ne seku odnosno ako je $\overrightarrow{\Pi_0\Sigma_0} \circ \overrightarrow{\Pi} \times \overrightarrow{\Sigma} \neq 0$.

Ako se prave seku onda one obrazuju ravan čiji je vektor $\overrightarrow{\Pi} \times \overrightarrow{\Sigma}$ koji normalan na bilo koji vektor u ravni, pa i na vektor $\overrightarrow{\Pi_0\Sigma_0}$ dobijen od tačaka pravih Π i Σ. Takođe zaključuje se da je ugao između pravih koje se seku oštar ugao između njihovih vektora. Ako su prave mimoilazne postavljaju se dva problema:

a) odrediti rastojanje između njih,

b) odrediti pravu koja je normalna na mimoilazne prave.

4.3.3. Odnos prave i ravni

Neka je $\Pi = \left\langle \Pi_0, \overrightarrow{\Pi} \right\rangle$ ravan, i $\Sigma = \left\langle \Sigma_0, \overrightarrow{\Sigma} \right\rangle$ prava:

I) prava Σ je paralelna ravni Π ako je:

$$\Pi \parallel \Sigma \Rightarrow \overrightarrow{\Pi} \perp \overrightarrow{\Sigma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Pi} \circ \overrightarrow{\Sigma} = 0,$$

II) ako nisu paralelne onda se seku, odnosno prava prodire ravan.

Ugao između prave i ravni jednak je oštrom uglu između prave i njene normalne projekcije na ravan. Ako je prava paralelna sa ravni, postavlja se pitanje koliko je udaljena od ravni, što je isto kao da tražimo rastojanje tačke od ravni. Tačku je potrebno ortogonalno projektovati na datu ravan, a to znači da moramo naći prodor zraka projektovanja kroz datu ravan. Na slici 2 prikazana je prava Γ koja prodire ravan Π u tački A. Neka je data ravan i prava:

$$\Pi : AX + BY + CZ + D = 0 \qquad \Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

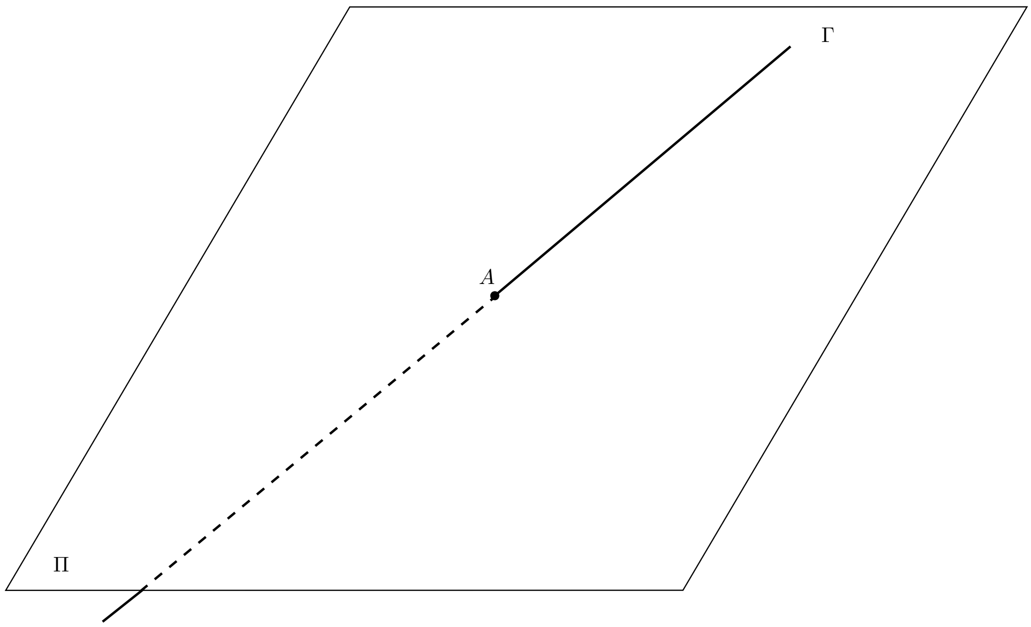
Njihov presek $\Pi \cap \Gamma = \{A\}$ je tačka $A\,(a, b, c)$ čije koordinate zadovoljavaju jednačine i ravni i prave. To znači da:

$$\begin{array}{rcrcl} a & = & x_0 & + & \alpha t \\ b & = & y_0 & + & \beta t \text{ i } Aa + Bb + Cc + D = 0 \\ c & = & z_0 & + & \gamma t \end{array}$$

sledi:

$$\begin{aligned} Aa + Bb + Cc + D = 0 \quad & \Rightarrow \quad A\,(x_0 + \alpha t) + B\,(y_0 + \beta t) + C\,(z_0 + \gamma t) + D = 0 \\ & \Rightarrow \quad t = \frac{-D - Ax_0 - By_0 - Cz_0}{A\alpha + B\beta + C\gamma} \end{aligned}$$

Koordinate tačke dobijamo ako vrednost za t vratimo u jednačinu date prave.



Slika 2: Prava Γ prodire ravan Σ u tački A

Možemo reći da se koordinate presečne tačke prave i ravni dobijaju ako se unese parametarski oblik prave u jednačinu ravni.

Dobijanje koordinata prodorne tačke prave kroz ravan omogućava nalaženje rastojanja tačke od ravni. Neka je data ravan $\Pi : AX + BY + CZ + D = 0$ i tačka $A\,(a, b, c)$ van ravni Π. Rastojanje tačke A od Π je rastojanje od A do B, gde je tačka B ortogonalna projekcija A na ravan Π. Projektujući zrak je prava $\Gamma = \left\langle A, \overrightarrow{\Pi} \right\rangle$ jer prolazi kroz tačku A i normalna je na ravan Π, odakle je njen vektor jednak vektoru ravni Π, sledi:

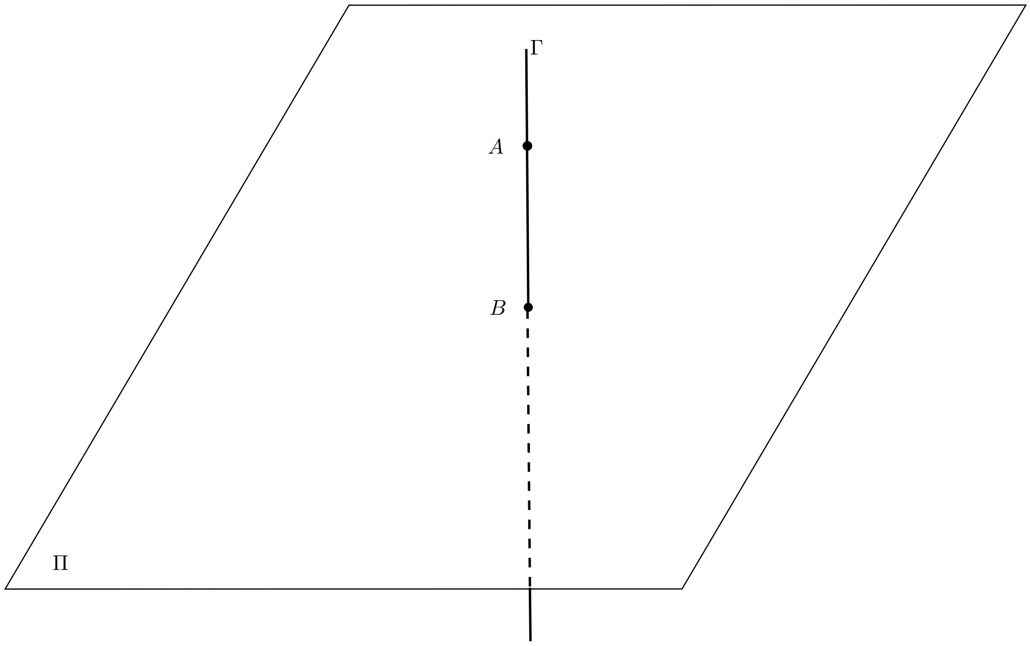
$$\begin{array}{rcccl} X & = & a & + & At \\ Y & = & b & + & Bt \\ Z & = & c & + & Ct \end{array}$$

Parametraski oblik jednačine prave Γ unese se u jednačinu ravni Π:

$$A\,(a + At) + B\,(b + Bt) + C\,(c + Ct) + D = 0 \Rightarrow t = \frac{-Aa - Bb - Cc - D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

odakle su koordinate tačke B jednake:

$$\begin{aligned} X &= a - A\frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ Y &= b - B\frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2} \\ Z &= c - C\frac{Aa + Bb + Cc + D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned}$$



Slika 3: Tačka B je ortogonalna projekcija tačke A na ravan Π

Posle unošenja koordinata tačaka A i B u obrazac za računanje rastojanja između tačaka dobijamo:

$$d(A,\Pi) = d(A,B) = \frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4.4. Algebarske krive drugog reda u ravni

Definicija 4.1. *Algebarska jednačina drugog stepena po X i Y je jednačina oblika:*

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0 \tag{4.9}$$

gde su A, B, C, D, E, F realni brojevi i $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Definicija 4.2. *Algebarska kriva drugog reda je skup tačaka u ravni čije koordinate zadovoljavaju neku algebarsku jednačinu drugog stepena.*

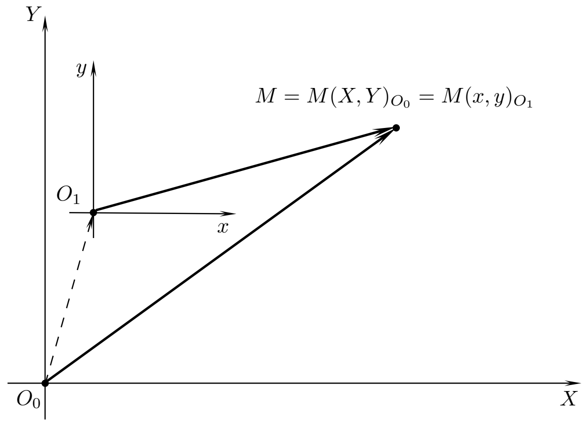
Zadaci i teoreme koje slede odnose se na vektore u Euklidskoj ravni. Sa:

$$Oe = \langle O, e\rangle = \langle O, [\vec{e_1}, \vec{e_2}]\rangle = \langle O, [e_1, e_2]\rangle$$

označavaćemo koordinatni sistem sa početkom O i vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$. Da bi istakli u kom koordinatnom sistemu su date koordinate tačke pišemo ih sa $M(X,Y)_O$.

4.4.1. Translatorno pomeranje koordinatnog sistema

Slika 4 pokazuje da je bez obzira na koordinatni sistem tačka $M = M(X,Y)_{O_0} = M(x,y)_{O_1}$ jedinstvena i pored promena koordinata. Neka su O_0e i O_1f dva koordinatna sistema iste ravni takvi da su im ose paralelne. Nađimo vezu između koordinata tačke M u koordinatnom sistemu O_0 i O_1. Iz uslova $e \parallel f$ sledi da je $\vec{e_1} = \vec{f_1}$ i $\vec{e_2} = \vec{f_2}$. Neka je data bilo koja tačka M ravni za



Slika 4: Koordinatni sistem O_0 je translatorno pomeren u O_1

koju je važi $M = M\left(X, Y\right)_{O_0 e} = M\left(x, y\right)_{O_1 f}$ i posmatrajmo koordinate tačke M u $O_0 e$ i $O_1 f$:

$$\overrightarrow{O_0 M} = X\vec{e_1} + Y\vec{e_2} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T \tag{4.10}$$

slično je i za drugi koordinatni sistem:

$$\overrightarrow{O_1 M} = x\vec{f_1} + y\vec{f_2} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot f^T \tag{4.11}$$

Kako je $\overrightarrow{O_0 M} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1 M}$ sledi iz prethodnog:

$$\begin{aligned} [X \quad Y]\, e^T = [a \quad b]\, e^T + [x \quad y]\, f^T \quad &\Rightarrow \\ [X \quad Y]\, e^T - [a \quad b]\, e^T = [x \quad y]\, f^T \quad &\Rightarrow \\ ([X \quad Y] - [a \quad b])\, e^T = [x \quad y]\, f^T \quad &\Rightarrow \\ [X - a \quad Y - b]\, e^T = [x \quad y]\, e^T \quad \text{jer je } e = f \quad &\Rightarrow \\ X - a = x \wedge Y - b = y & \end{aligned}$$

gde je $O_1\left(a, b\right)_{O_0 e}$. Neka je data algebarska kriva $AX^2 + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$ bez mešovitog člana. Onda je:

$$\begin{aligned} & AX^2 + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0 \Rightarrow \\ & A\left(X^2 + 2\frac{D}{A}X\right) + C\left(Y^2 + 2\frac{E}{C}Y\right) + F = 0 \Rightarrow \\ & A\left(X^2 + 2\frac{D}{A}X + \left(\frac{D}{A}\right)^2\right) - \frac{D^2}{A} + C\left(Y^2 + 2\frac{E}{C}Y + \left(\frac{E}{C}\right)^2\right) - \frac{E^2}{C} + F = 0 \Rightarrow \\ & a\left(x + \alpha\right)^2 + b\left(y + \beta\right)^2 = c \end{aligned} \tag{4.12}$$

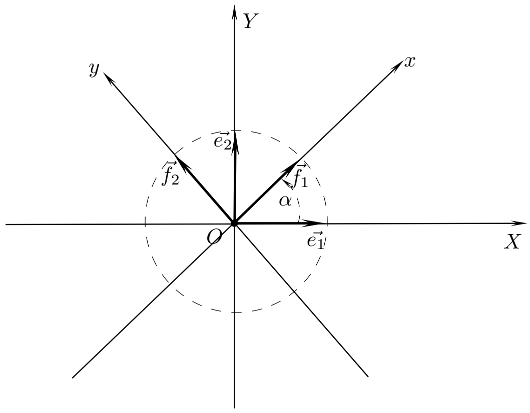
Ukratko promenom koordinata sa $X = x + a$ i $Y = y + b$ zadaje se translatorno pomeranje koordinatnog sistema. Navedeni primer pokazuje kako se linearni deo algebarske krive svodi na kanonski oblik, i prepoznati šta je od konusnih preseka zadato.

4.4.2. Rotacija koordinatnog sistema

Neka su Oe i Of dva koordinatna sistema iste ravni takvi da je $\alpha = \measuredangle(e, f)$. Nađimo vezu između koordinata tačke M u koordinatnom sistemu Oe i Of.

$$M = M\left(X, Y\right)_{Oe} = M\left(x, y\right)_{Of}$$

Iz uslova $\alpha = \measuredangle(e, f)$ sledi da je:



Slika 5: Koordinatni sistem Oe je rotiran u O_f

$$\begin{array}{rcrcr} \vec{f_1} & = & \vec{e_1}\cos\alpha & + & \vec{e_2}\sin\alpha \\ \vec{f_2} & = & -\vec{e_1}\sin\alpha & + & \vec{e_2}\cos\alpha \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow f^T = A \cdot e^T$$

gde je A *matrica prelaska* sa Oe na Of koordinatni sistem. Neka je data bilo koja tačka M ravni za koju važi $M = M\left(X, Y\right)_{Oe} = M\left(x, y\right)_{Of}$. Posmatrajmo koordinate tačke M u Oe i Of:

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{e_1} + Y\vec{e_2} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T \tag{4.13}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{f_1} + y\vec{f_2} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot f^T \tag{4.14}$$

Kako je $\overrightarrow{OM}$ jedinstven vektor sledi iz prethodnog:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot f^T \quad & \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \cdot e^T \\ & \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \\ & \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} X & = & x\cos\alpha & - & y\sin\alpha \\ Y & = & x\sin\alpha & + & y\cos\alpha \end{array} \end{aligned}$$

Slično se može dobiti i obrnuta veza:

$$f^T = A \cdot e^T \Rightarrow A^{-1} \cdot f^T = A^{-1} \cdot A \cdot e^T \Rightarrow e^T = A^{-1} \cdot f^T$$

gde se inverzna matrica matrice prelaska jednostavno nalazi, jednaka je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

odakle se druga veza između koordinata dobija iz:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot e^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot f^T \quad & \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot A^{-1} \cdot f^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot f^T \\ & \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \\ & \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & X\cos\alpha & + & Y\sin\alpha \\ y & = & -X\sin\alpha & + & Y\cos\alpha \end{array} \end{aligned}$$

Posmatrajmo samo prva tri sabirka algebarska krive $AX^2 + 2BXY + CY^2$ i unesimo prethodno dobijen rezultat:

$$\begin{array}{rcrcr} X & = & x\cos\alpha & - & y\sin\alpha \\ Y & = & x\sin\alpha & + & y\cos\alpha \end{array}$$

u ova tri sabirka.

$$\begin{aligned} AX^2 + 2BXY + CY^2 &= A\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha\right)^2 + \\ &\quad + 2B\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha\right)\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right) + \\ &\quad + C\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right)^2 \\ &= Ax^2\cos^2\alpha - 2Axy\sin\alpha\cos\alpha + Ay^2\sin^2\alpha + \\ &\quad + 2Bx^2\sin\alpha\cos\alpha + 2Bxy\cos^2\alpha - \\ &\quad - 2Bxy\sin^2\alpha - 2By^2\sin\alpha\cos\alpha + \\ &\quad + Cx^2\sin^2\alpha + 2Cxy\sin\alpha\cos\alpha + Cy^2\cos^2\alpha \end{aligned}$$

i izaberimo takvo α takvo da se dobije:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = ax^2 + cy^2.$$

To znači da koeficijent uz mešoviti član xy mora biti jednak 0.

$$\begin{aligned} -2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B\cos^2\alpha - 2B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad &\Rightarrow \\ -A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0 \quad &\Rightarrow \\ 2B\cos 2\alpha = A\sin 2\alpha - C\sin 2\alpha \quad &\Rightarrow \\ 2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha \quad &\Rightarrow \\ \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2B}{A - C} \quad &\Rightarrow \\ \tan 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \quad & \end{aligned}$$

To znači da se može dobiti ugao rotacije α za koji treba rotirati koordinatni sistem tako da iz jednačine krive drugog reda nestane mešoviti član.

Teorema 4.1. *Algebarska kriva drugog reda zadata jednačinom:*

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

u ortonormiranom reperu Oe može se svesti na kanonsku jednačinu odgovarajućeg konusnog *preseka u nekom Of ortonormiranom reperu.*

Dokaz. Sledi na osnovu prethodno dobijenih rezultata. Ostali slučajevi su jednostavni za razmatranje. □

4.4.3. Algebarske površi

Jednačina	**Naziv**	**Napomena**
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	elipsoid	$a=b=c$ dobijamo sferu
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	jednograni hiperboloid	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	dvograni hiperboloid	
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z \ (a>0)$	eliptički paraboloid	specijalnom slučaju - kružnom paraboloidu
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z \ (a>0, b>0)$	hiperbolički paraboloid	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	konus	eliptički ili kružni konus
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	eliptički cilindar	specijalnom slučaju i kružni cilindar
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	hiperbolički cilindar	
$px^2-y=0$	parabolički cilindar	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	par ravni koje se seku	
$\frac{x^2}{a^2}=1$	par paralelnih ravni	

4.5. Posebni zadaci

Primer 4.1. *Neka su date dve ravni:*

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \Pi & : & 5X & + & 10Y & - & 20Z & = & -4 \\ \Sigma & : & -X & - & 2Y & + & 4Z & = & 18 \end{array}$$

Pokazati da su ravni Π *i* Σ *paralelne.*

Dokaz. Kako je:

$$\vec{\Pi} = (5, 10, -20) = (1, 2, -4)$$

i

$$\vec{\Sigma} = (-1, -2, 4) = (1, 2, -4)$$

sledi da je $\vec{\Pi} = \vec{\Sigma}$ odnosno $\Pi \parallel \Sigma$. □

Primer 4.2. *Neka su date dve ravni:*

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \Pi & : & 2X & + & 2Y & + & Z & = & -4 \\ \Sigma & : & 4X & - & 2Y & + & 2Z & = & 18 \end{array}$$

U kakvom su odnosu ove ravni?

Dokaz. Kako je:

$$\vec{\Pi} = (2, 2, 1) \text{ i } \vec{\Sigma} = (4, -2, 2)$$

sledi da je $\vec{\Pi} \neq \vec{\Sigma}$ odnosno $\Pi \cap \Sigma \neq \emptyset$. Presek dve ravni je prava. Odstupimo od uobičajenog načina nalaženja jednačine prave, traženje tačke prave i vektora prave. Saberimo jednačine:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr} \Pi & : & 2X & + & 2Y & + & Z & = & -4 \\ \Sigma & : & 4X & - & 2Y & + & 2Z & = & 18 \ \hookleftarrow_{+} \end{array} \tag{4.15}$$

dobijamo $6X + 3Z = 14$. Odnosno $2X + Z = 7$, gde se za $Z = t$ dobija rešenje sistema (4.15):

$$\begin{array}{lcrcl} X & = & \frac{7}{2} & - & \frac{1}{2}t \\ Y & = & -\frac{11}{2} & & \\ Z & = & & & t \end{array} \Rightarrow \frac{X - \frac{7}{2}}{1} = \frac{Y + \frac{11}{2}}{0} = \frac{Z + 0}{2}$$

a to je jednačina presečne prave dve ravni. Takođe, može se naći ugao između ravni:

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{\Sigma} = \mid \vec{\Pi} \mid\mid \vec{\Sigma} \mid \cos \measuredangle(\vec{\Pi}, \vec{\Sigma})$$

odnosno:

$$\begin{array}{lcl} \vec{\Pi} \cdot \vec{\Sigma} & = & (2, 2, 1) \cdot (4, -2, 2) = 6 \\ \vec{\Pi} \cdot \vec{\Sigma} & = & \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} + \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} \cos \measuredangle(\vec{\Pi}, \vec{\Sigma}) \end{array}$$

odakle je:

$$6 = 3 \cdot 2\sqrt{6} \cos \measuredangle(\vec{\Pi}, \vec{\Sigma}) \Rightarrow \cos \measuredangle(\vec{\Pi}, \vec{\Sigma}) = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \measuredangle(\vec{\Pi}, \vec{\Sigma}) = \arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$$

□

Primer 4.3. *Naći rastojanje tačke $A(a,b,c)$ od prave*

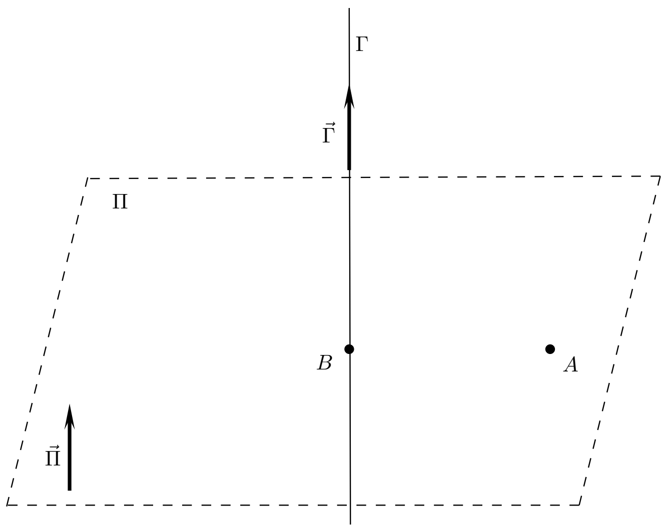
$$\Gamma : \frac{X-x_0}{\alpha} = \frac{Y-y_0}{\beta} = \frac{Z-z_0}{\gamma}$$

Dokaz. Nađimo ravan Π koja sadrži tačku A i normalna je na pravu Γ. Prema predhodnom $\Pi = \langle A, \vec{\Gamma} \rangle$, sledi da postoji presek $\{B\} = \Pi \cap \Gamma$. Traženo rastojanje jednako je $d(A,B)$. Prethodno opisani postupak rešavanja zadatka, prikazan je na slici 6, može se zapisati na sledeći način:

1) $\Pi = \langle A, \vec{\Gamma} \rangle$ gde je Π ravan;

2) $\{B\} = \Pi \cap \Gamma$ gde je Π ravan iz tačke 1), a Γ data prava;

3) $d(A,B)$.



Slika 6: Ravan Π normalna je na pravu Γ i sadrži tačku A

□

Primer 4.4. *Naći simetričnu tačku A' tački $A(a,b,c)$ u odnosu na ravan*

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Rešenje se može prikazati slikom 7 i zapisati sledećim koracima:

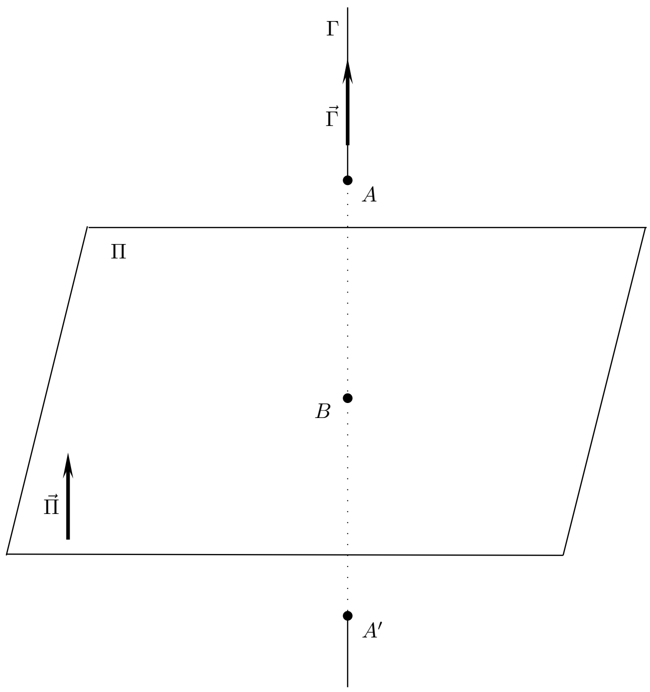
1) $\Gamma = \langle A, \vec{\Pi} \rangle$ gde je Γ prava;

2) $\{B\} = \Pi \cap \Gamma$ gde je Π data ravan, a Γ prava iz tačke 1);

3) $d(A,B) = d(B,A')$.

Ako su koordinate tačaka $A(a,b,c)$, $B(p,q,r)$ i $A'(a',b',c')$ tada se 3) pretvara u sledeći račun:

$$p = \frac{a+a'}{2}, \quad q = \frac{b+b'}{2}, \quad r = \frac{c+c'}{2}$$



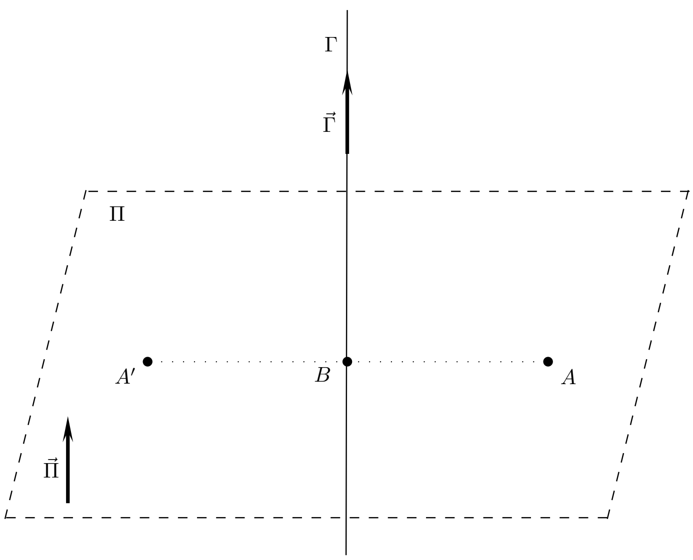
Slika 7: Simetrična tačka A' tačke A u odnosu na ravan Π

□

Primer 4.5. *Naći simetričnu tačku A' tački $A\,(a, b, c)$ u odnosu na pravu*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

Dokaz. Slika 8 je vrlo slična slici 6.



Slika 8: Simetrična tačka A' tačke A u odnosu na pravu Γ

Koraci u postupku rešavanja su:

1) $\Pi = \langle A, \vec{\Gamma} \rangle$ gde je Π ravan;

2) $\{B\} = \Pi \cap \Gamma$ gde je Π ravan iz tačke 1), a Γ data prava;

3) $d(A, B) = d(B, A')$.

Ako su koordinate tačaka $A(a, b, c)$, $B(p, q, r)$ i $A'(a', b', c')$ tada se 3) pretvara u sledeći račun:

$$p = \frac{a + a'}{2}, \quad q = \frac{b + b'}{2}, \quad r = \frac{c + c'}{2}$$

$\square$

Primer 4.6. *Naći simetričnu pravu* Γ' *prave*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

u odnosu na ravan

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

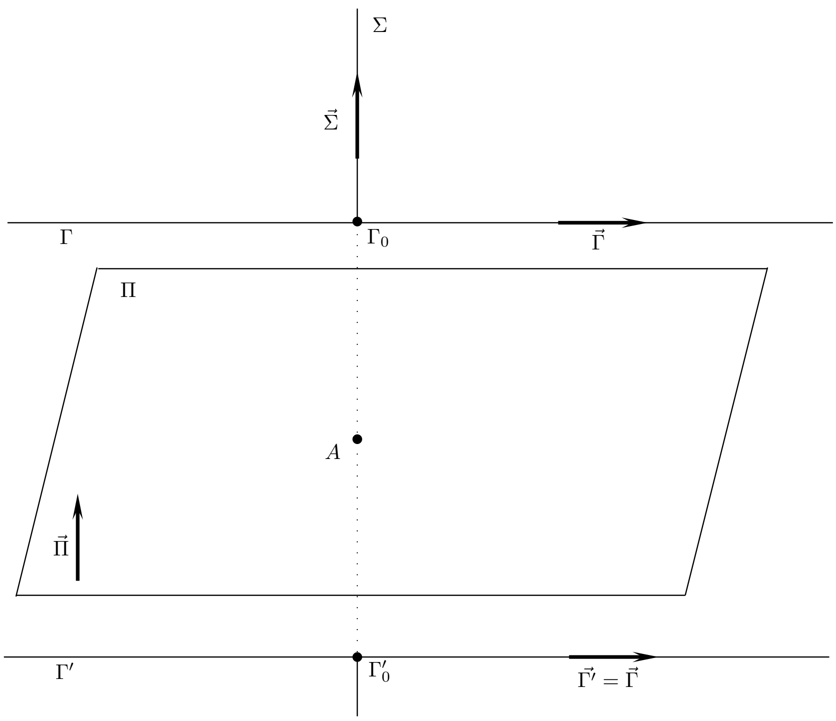
Dokaz. Ako je $\vec{\Pi} \cdot \vec{\Gamma} = 0 \Rightarrow \Pi \parallel \Gamma$. Način rešavanja je prikazan slikom 9 i dat koracima:

1) $\Sigma = \langle \Gamma_0, \vec{\Pi} \rangle$ gde je Σ prava, Γ_0 bilo koja tačka date prave Γ;

2) $\{A\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 1), a Π data ravan;

3) $d(\Gamma_0, A) = d(A, \Gamma_0')$;

4) $\Gamma' = \langle \Gamma_0', \vec{\Gamma} \rangle$.



Slika 9: Simetrična prava Γ' prave Γ u odnosu na ravan Π kada je $\Gamma \parallel \Pi$

Ako je $\vec{\Pi} \cdot \vec{\Gamma} \neq 0$ sledi da se prava Γ i ravan Π seku. Način rešavanja je prikazan slikom 10 i dat koracima:

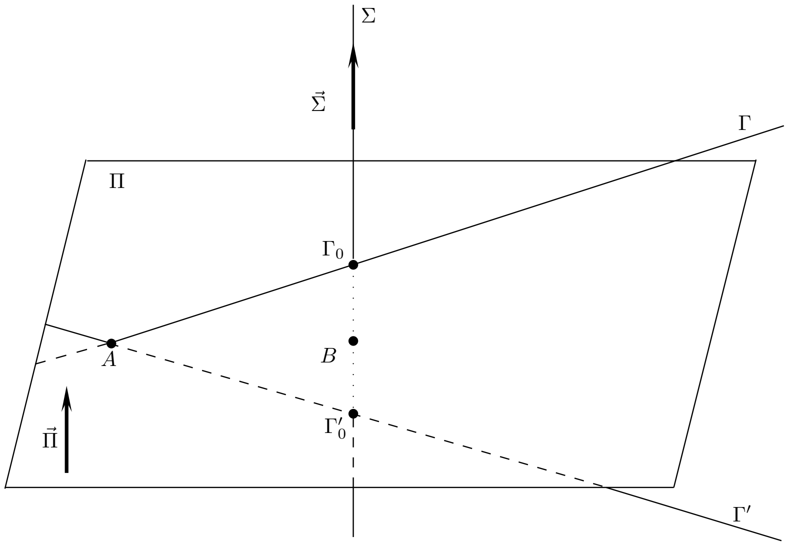
1) $\{A\} = \Pi \cap \Gamma$;

2) $\Sigma = \langle \Gamma_0, \vec{\Pi} \rangle$ gde je Σ prava, $\Gamma_0 \neq A$ neka tačka date prave Γ;

3) $\{B\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 2), a Π data ravan;

4) $d(\Gamma_0, B) = d(B, \Gamma_0')$;

5) $\Gamma' = \langle A, \overrightarrow{A\Gamma_0'} \rangle$.



Slika 10: Simetrična prava Γ' prave Γ u odnosu na ravan Π kada $\Gamma \nparallel \Pi$

□

4.5.1. Projekcije tačke na ravan

Od značaja su nam tri vrste projektovanja:

a) *Ortogonalno*, gde je zrak projektovanja normalan na projektujuću ravan. Posledica je da bilo koji projektujući zrak ima vektor jednak vektoru projektujuće ravni.

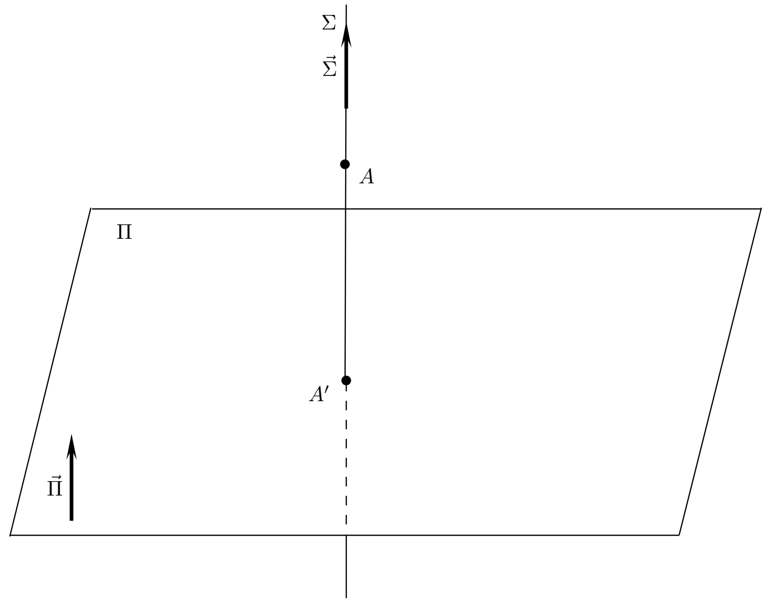
b) *Koso*, gde je zrak projektovanja paralelan datom vektoru $\vec{a}$. Posledica je da svaki projektujući zrak ima vektor jednak datom vektoru $\vec{a}$.

c) *Centralno*, gde svi zraci projektovanja prolaze kroz jednu datu tačku S. Posledica je da se svaki zrak projektovanja posebno formira, svaki od njih ima početak u centru projektovanja tački S

Primer 4.7. *Ortogonalno projektovati tačku $A(a, b, c)$ na ravan*

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Na slici 11 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz datu tačku A, vektor zraka je vektor $\vec{\Pi}$.



Slika 11: Ortogonalna projekcija tačke A na ravan Π

Rešenje je moguće dati i koracima:

1. $\Sigma = \langle A, \vec{\Pi} \rangle$
2. $\{A'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 1), a Π data ravan;

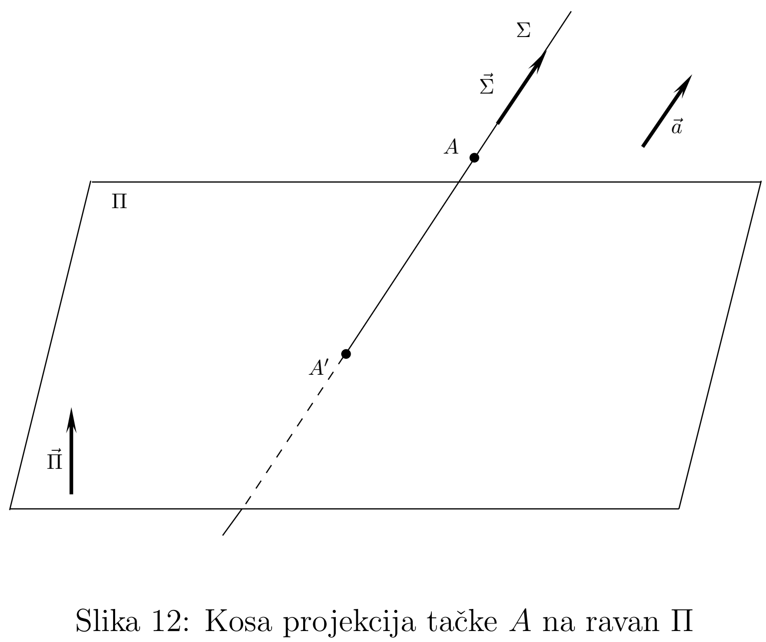
$\square$

Primer 4.8. *Koso projektovati tačku* $A\,(a, b, c)$ *na ravan*

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

ako je zrak projektovanja paralelan vektoru $\vec{a} = (p, q, r)$

Dokaz. Na slici 12 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz datu tačku A, vektor zraka je vektor $\vec{a}$.



Slika 12: Kosa projekcija tačke A na ravan Π

Rešenje je moguće dati i koracima:

1. $\Sigma = \langle A, \vec{a} \rangle$
2. $\{A'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 1), a Π data ravan;

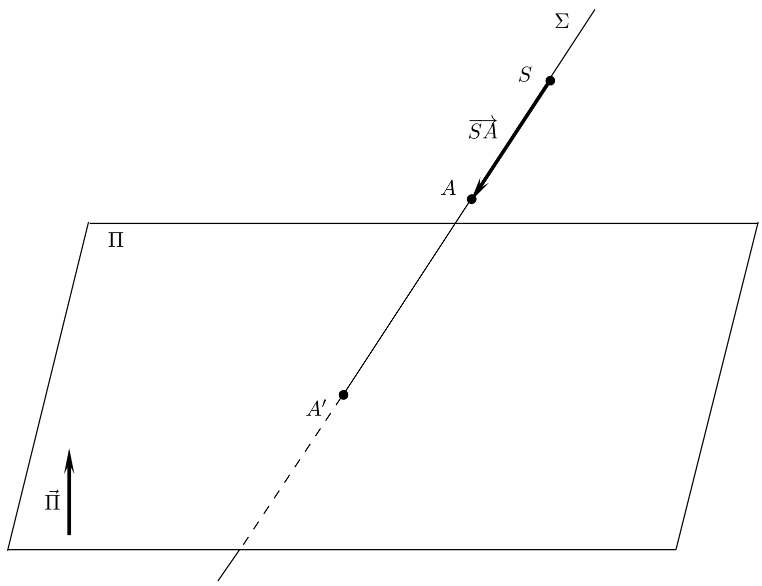
$\square$

Primer 4.9. *Centralno projektovati tačku $A(a, b, c)$ na ravan*

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

ako je centar projektovanja $S(p, q, r)$

Dokaz. Na slici 13 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz datu tačke A i S.



Slika 13: Centralna projekcija tačke A na ravan Π

Rešenje je moguće dati i koracima:

1. $\Sigma = \langle A, \overrightarrow{SA} \rangle$
2. $\{A'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 1), a Π data ravan;

$\square$

4.5.2. Projekcije prave Γ na ravan Π ako je $\Gamma \parallel \Pi$

Primer 4.10. *Ortogonalno projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

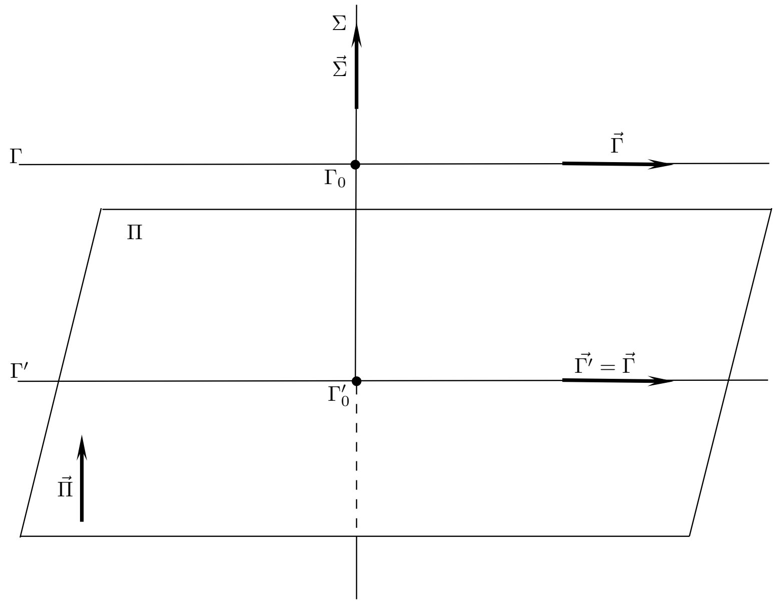
na ravan

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da je prava Γ paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0 \Rightarrow \Gamma \parallel \Pi$$

i iskoristiti činjenicu da je projekcija prava, Γ', paralelna orginalu Γ, odnosno $\Gamma' \parallel \Gamma$. Zadatak se svodi na ortogonalno projektovanje tačke na ravan. Na slici 14 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, vektor zraka je vektor $\vec{\Pi}$.



Slika 14: Ortogonalna projekcija prave Γ na ravan Π, kada je $\Gamma \parallel \Pi$

Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0$;
2. $\Sigma = \langle \Gamma_0, \vec{\Pi} \rangle$;
3. $\{\Gamma'_0\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 2), a Π data ravan;
4. $\Gamma' = \langle \Gamma'_0, \vec{\Gamma} \rangle$

□

Primer 4.11. *Koso, paralelno vektoru $\vec{a}$, projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

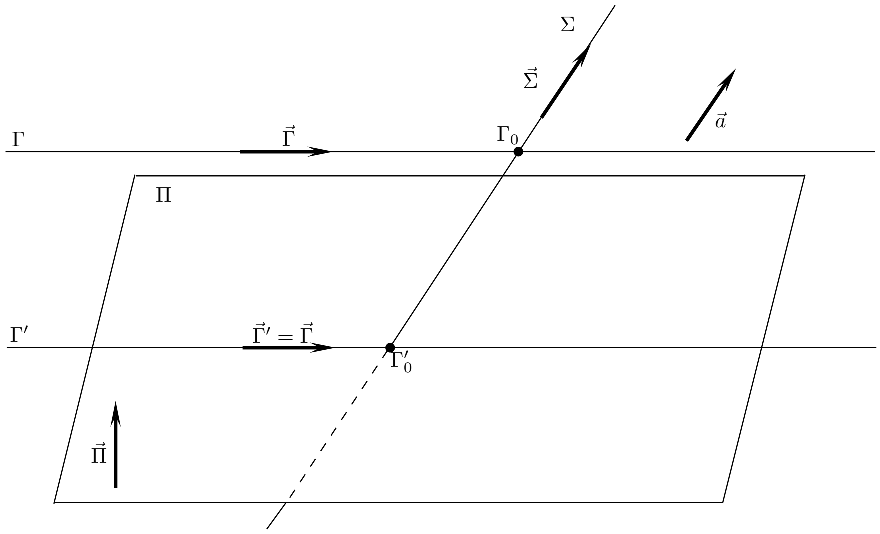
na ravan

$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da je prava Γ paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0 \Rightarrow \Gamma \parallel \Pi$$

i iskoristiti činjenicu da je projekcija prava, Γ', paralelna orginalu Γ, odnosno $\Gamma' \parallel \Gamma$. Zadatak se svodi na koso projektovanje tačke na ravan. Na slici 15 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, vektor zraka je vektor $\vec{a}$.



Slika 15: Kosa, paralelna vektoru $\vec{a}$, projekcija prave Γ na ravan Π, kada je $\Gamma \parallel \Pi$

Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0$;
2. $\Sigma = \langle \Gamma_0, \vec{a} \rangle$;
3. $\{\Gamma'_0\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 2), a Π data ravan;
4. $\Gamma' = \langle \Gamma'_0, \vec{\Gamma} \rangle$

□

Primer 4.12. *Centralno, iz centra projektovanja $S\,(p, q, r)$, projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

na ravan

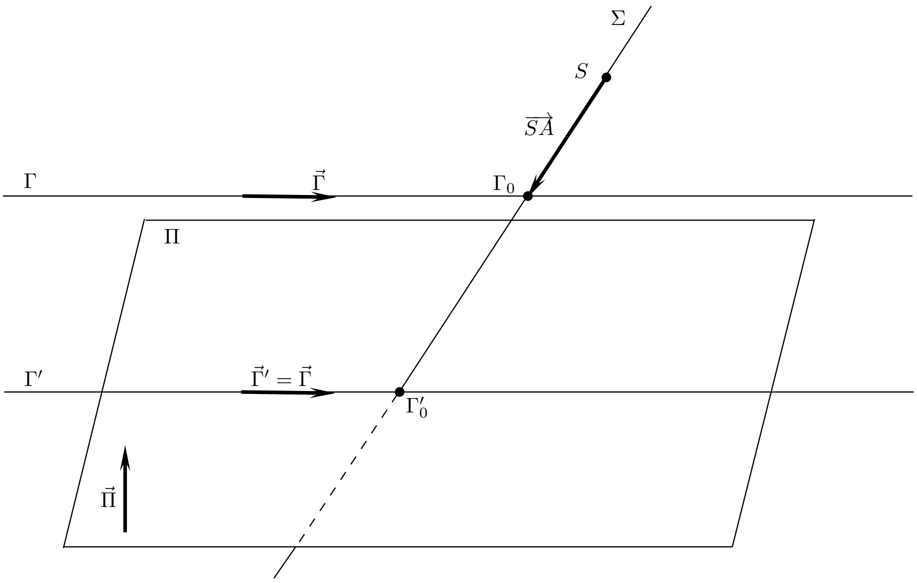
$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da je prava Γ paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0 \Rightarrow \Gamma \parallel \Pi$$

i iskoristiti činjenicu da je projekcija prava, Γ', paralelna orginalu Γ, odnosno $\Gamma' \parallel \Gamma$. Zadatak se svodi na centralno projektovanje tačke na ravan. Na slici 16 je prikazan zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, a prolazi i kroz centar projektovanja, tačku S. Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} = 0$;
2. $\Sigma = \langle \Gamma_0, \overrightarrow{S\Gamma_0} \rangle$;
3. $\{\Gamma'_0\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 2), a Π data ravan;
4. $\Gamma' = \langle \Gamma'_0, \vec{\Gamma} \rangle$



Slika 16: Centralna projekcija prave Γ na ravan Π, kada je $\Gamma \parallel \Pi$

□

4.5.3. Projekcije prave Γ na ravan Π ako je $\Gamma \nparallel \Pi$

Primer 4.13. *Ortogonalno projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

na ravan

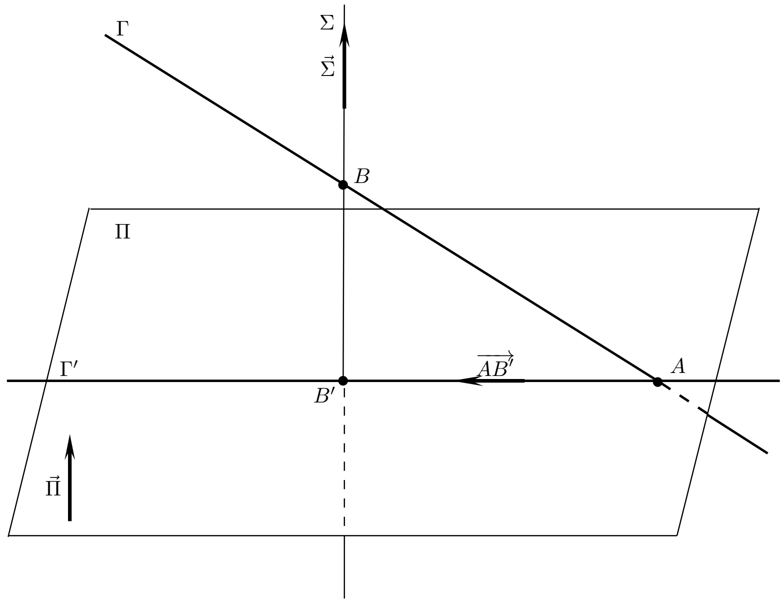
$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da prava Γ nije paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0 \Rightarrow \Gamma \nparallel \Pi$$

tada postoji prodor prave Γ kroz ravan Π, odnosno $\{A\} = \Gamma \cap \Pi$. Zadatak se svodi na nalaženje jednog prodora i ortogonalno projektovanje tačke na ravan. Na slici 17 prikazan je zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, vektor zraka je vektor $\vec{\Pi}$. Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0$;
2. $\{A\} = \Pi \cap \Gamma$ gde su Γ i Π dati;
3. $\Sigma = \langle B, \vec{\Pi} \rangle$, gde je $B \neq A$ neka tačka sa prave Γ;
4. $\{B'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 3), a Π data ravan;
5. $\Gamma' = \langle A, \overrightarrow{AB'} \rangle$



Slika 17: Ortogonalna projekcija prave Γ na ravan Π, kada $\Gamma \nparallel \Pi$

□

Primer 4.14. *Koso, paralelno vektoru $\vec{a}\,(p, q, r)$, projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

na ravan

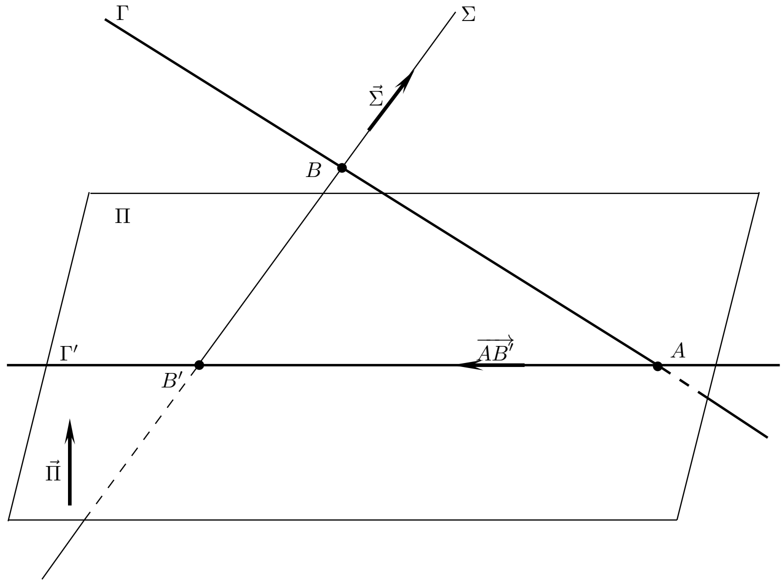
$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da prava Γ nije paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0 \Rightarrow \Gamma \nparallel \Pi$$

tada postoji prodor prave Γ kroz ravan Π, odnosno $\{A\} = \Gamma \cap \Pi$. Zadatak se svodi na nalaženje jednog prodora i kosog projektovanja tačke na ravan. Na slici 18 prikazan je zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, vektor zraka je $\vec{a}$. Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0$;
2. $\{A\} = \Pi \cap \Gamma$ gde su Γ i Π dati;
3. $\Sigma = \langle B, \vec{a} \rangle$, gde je $B \neq A$ neka tačka sa prave Γ;
4. $\{B'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 3), a Π data ravan;
5. $\Gamma' = \langle A, \overrightarrow{AB'} \rangle$



Slika 18: Kosa projekcija prave Γ na ravan Π, kada je $\Gamma \nparallel \Pi$

□

Primer 4.15. *Centralno, iz centra projektovanja $S\,(p,q,r)$, projektovati pravu:*

$$\Gamma : \frac{X - x_0}{\alpha} = \frac{Y - y_0}{\beta} = \frac{Z - z_0}{\gamma}$$

na ravan

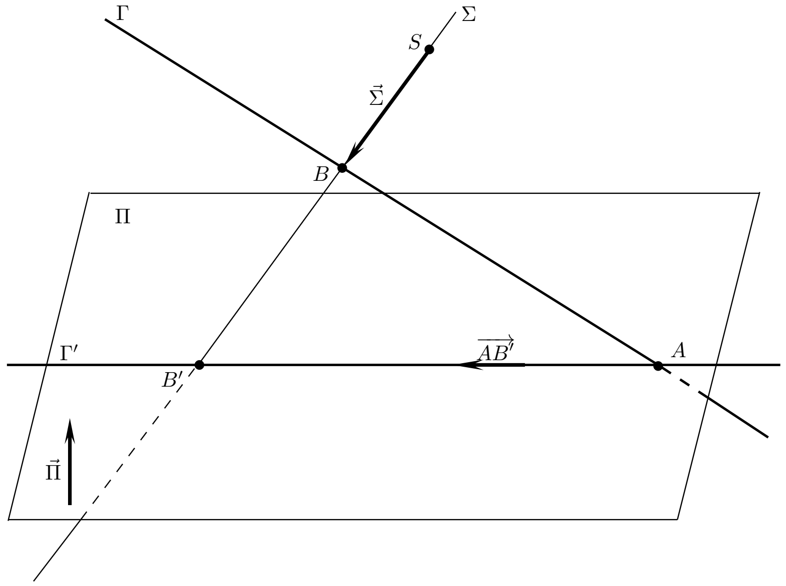
$$\Pi : \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$$

Dokaz. Prvo je potrebno utvrditi da prava Γ nije paralelna sa ravni Π.

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0 \Rightarrow \Gamma \nparallel \Pi$$

tada postoji prodor prave Γ kroz ravan Π, odnosno $\{A\} = \Gamma \cap \Pi$. Zadatak se svodi na nalaženje jednog prodora i centralnog projektovanja tačke na ravan. Na slici 19 prikazan je zrak projektovanja koji prolazi kroz bilo koju tačku Γ_0 prave Γ, i centar projektovanja S. Rešenje je dato u koracima:

1. $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Pi} \neq 0$;
2. $\{A\} = \Pi \cap \Gamma$ gde su Γ i Π dati;
3. $\Sigma = \langle B, \overrightarrow{SB} \rangle$, gde je $B \neq A$ neka tačka sa prave Γ;
4. $\{B'\} = \Pi \cap \Sigma$ gde je Σ prava iz tačke 3), a Π data ravan;
5. $\Gamma' = \langle A, \overrightarrow{AB'} \rangle$



Slika 19: Centralna projekcija prave Γ na ravan Π, kada je $\Gamma \nparallel \Pi$

$\square$