1. Elektrostatika

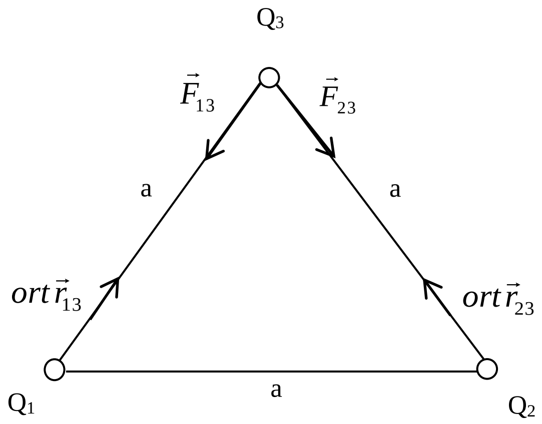
1.1. Tri mala tela, naelektrisanja $Q_1=Q_2=10^{-10}$[C] i $Q_3=-20\cdot10^{-10}$[C], nalaze se u vazduhu, u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a=1$[cm]. Odrediti vektor jačine elektrostatičke sile koja deluje na telo naelektrisanja Q_3.

Rešenje:

Kulonov zakon definiše silu koja deluje između dva tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot ort\vec{r}_{12}$$

Naelektrisanja se nalaze u vazduhu, na rastojanju r. Konstanta vazduha (i vakuma) je $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, $ort\vec{r}_{12}$ je jedinični vektor položaja naelektrisanog tela 2 u odnosu na naelektrisano telo 1.



Slika 1.1.1.

Shodno ovome, na tačkasto naelektrisanje Q_3 deluju sile koje potiču od tačkastih naelektrisanja Q_1 i Q_2:

$$\vec{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r^2} \cdot ort\vec{r}_{13} = -18 \cdot 10^{-7} N \cdot ort\vec{r}_{13}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r^2} \cdot ort\vec{r}_{23} = -18 \cdot 10^{-7} N \cdot ort\vec{r}_{23}$$

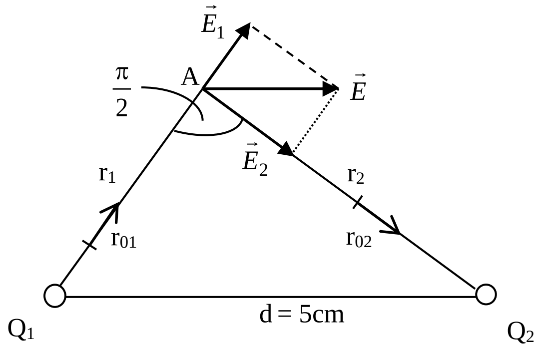
Rezultantna sila koja deluje na tačkasto naelektrisanje Q_3 je: $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$. Intenzitet ove sile je:

$$F_3 = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13}F_{23} \cdot \cos\angle(\vec{F}_{13}; \vec{F}_{23})} = \sqrt{(18 \cdot 10^{-7})^2 + (18 \cdot 10^{-7})^2 + 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 10^{-14} \cdot \cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{324 \cdot 10^{-14} + 324 \cdot 10^{-14} + 648 \cdot 10^{-14} \cdot \frac{1}{2}} = 31{,}177 \cdot 10^{-7} N$$

Vektor $\vec{F}_3$ sa vektorima $\vec{F}_{13}$ i $\vec{F}_{23}$ zaklapa ugao $\frac{\pi}{6}$.

1.2. Dva punktualna naelektrisanja Q_1=1,2[pC] i Q_2=-0,6[pC] nalaze se na rastojanju d=5[cm]. Odrediti jačinu elektrostatičkog polja E u tački A koja se nalazi na rastojanju r_1=3[cm] od Q_1 i r_2=4[cm] od Q_2.



Slika 1.2.1.

Rešenje:

Vektor jačine električnog polja u tački A, koje potiče od Q_1 je:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \vec{r}_{01} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^{-12}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \left[\frac{V}{m}\right] \cdot \vec{r}_{01} = 11{,}99 \left[\frac{V}{m}\right] \cdot \vec{r}_{01}$$

Vektor jačine električnog polja u tački A, koje potiče od Q_2 je:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^{\,2}} \cdot \vec{r}_{02} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{0{,}6 \cdot 10^{-12}}{(4 \cdot 10^{-2})^2} \left[\frac{V}{m}\right] \cdot \vec{r}_{02} = 3{,}37 \left[\frac{V}{m}\right] \cdot \vec{r}_{02}$$

Vektor rezultantnog elektrostatičkog polja dobija se vektorskim sabiranjem:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \, ,$$

i prikazan je na slici 1.2.1.

Intenzitet ovog vektora je:

$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2} + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot cos\angle(E_1; E_2)} = \sqrt{E_1^{\,2} + E_2^{\,2}} = 12{,}45 \left[\frac{V}{m}\right]$$

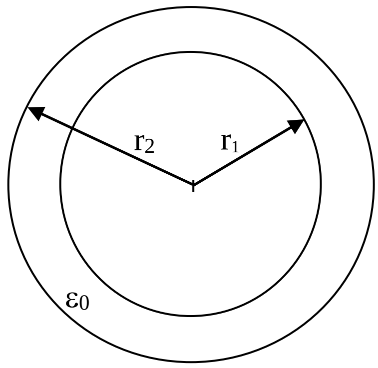
1.3. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika sfernog vazdušnog kondenzatora iznosi r_1=2[cm], a unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je r_2=3[cm]. Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika je U_{12}=150[V].

Odrediti:

a) površinske gustine naelektrisanja obe elektrode;

b) najveću jačinu elektrostatičkog polja kondenzatora;

c) kapacitivnost kondenzatora.



Slika 1.3.1. Sferni vazdušni kondenzator

Rešenje:

a) Po definiciji, napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika kondenzatora je:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 E \cdot dr \cdot cos(0) = \int_1^2 E \cdot dr = \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

Odakle se dobija:

$$Q_1 = -Q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot U_{12}}{r_2 - r_1} = 10 \cdot 10^{-10} [C].$$

Površinska gustina naelektrisanja unutrašnje elektrode je:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} = 1{,}9 \cdot 10 - 7 \left[\frac{C}{m^2} \right],$$

a spoljašnje:

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2} = -0{,}884 \cdot 10^{-7} \left[\frac{C}{m^2} \right].$$

b) Jačina vektora elektrostatičkog polja u sfernom kondenzatoru određuje se iz:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad (r_1 \leq r \leq r_2)$$

Najveća jačina elektrostatičkog polja je neposredno uz površinu unutrašnje elektrode sfernog kondenzatora:

$$E\,max = \frac{Q1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r_1^2} = \frac{10 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}} = 22{,}49091 \cdot 10^3 \left[\frac{V}{m} \right].$$

c) Kapacitivnost ovog kondenzatora je:

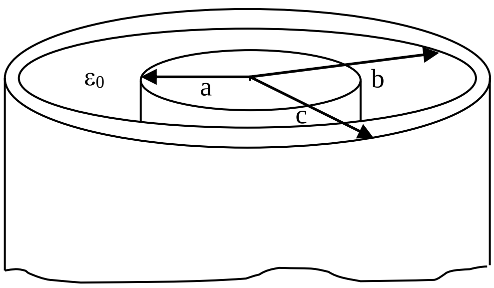
$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = \frac{10^{-10}}{150} = 6{,}666\left[pF\right].$$

1.4. Koaksijalni vazdušni kabl poluprečnika *a*=0,5[cm], *b*=1[cm] i *c*=1,1[cm] naelektrisan je naelektrisanjem $Q_1=-Q_2=2\cdot 10^{-8}$[C] na dužini *l*=20[m].

Odrediti:

a) jačinu vektora elektrostatičkog polja u kablu;

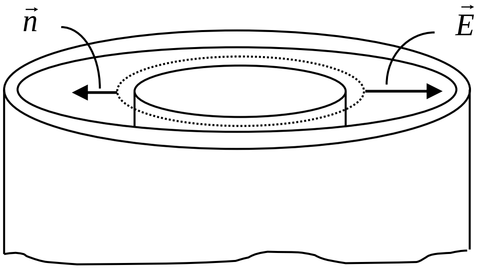
b) podužnu kapacitivnost kabla.



Slika 1.4.1. Koaksijalni vazdušni kabl

Rešenje:

a) Unutrašnji i spoljašnji provodnik koaksijalnog kabla iz teksta zadatka naelektrisani su istom količinom naelektrisanja, suprotnog znaka, odnosno ovaj kabl je koaksijalni kondenzator. Kao i kod ostalih kondenzatora, elektrostatičko polje postoji samo između njegovih provodnika (elektroda) kabla, radijalno je, usmereno od unutrašnje prema spoljašnjoj elektrodi.



Slika 1.4.2. Elektrostatičko polje koaksijalnog kondenzatora

Po Gausovom zakonu:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

pri čemu je *S* zamišljena površina valjka visine *l*.

U svim tačkama bazisa tog zamišljenog valjka, ugao između vektora jačine elektrostatičkog polja i normale na površinu *S* je prav, pa samim tim nema fluksa kroz bazise valjka. Primenom Gausovog zakona se ima:

$$E = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{2\pi r l \varepsilon_0}; \qquad (a<r<b)$$

Elektrostatičko polje postoji samo unutar kondenzatora. Maksimalni intenzitet je uz provodnik poluprečnika *a*.

$$E(a) = \frac{Q_1}{2\pi a \cdot l \cdot \varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^{-8} \cdot 10^{14}}{277{,}89} = 0{,}0036 \cdot 10^{6} = 3.6 \cdot 10^{3} \left[\frac{V}{m}\right]$$

Minimalni intenzitet je uz provodnik poluprečnika *b*.

$$E(b)=1{,}8[\mathrm{V/m}]$$

b) Napon između unutrašnje i spoljašnje elektrode je:

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E}d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q_1}{2\pi r \cdot l \cdot \varepsilon_0} \cdot dr \cdot cos \sphericalangle (\vec{E}; d\vec{r})$$

odnosno:

$$U_{ab} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 \cdot l} \cdot ln\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{6{,}28 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 20} \cdot ln\frac{1}{0{,}5} = 12{,}47[V]$$

Kapacitivnost je:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = 0{,}16 \cdot 10^{-8} = 1{,}6[nF],$$

a podužna kapacitivnost:

$$C^{/} = \frac{C}{l} = \frac{1{,}6[nF]}{20[m]} = 0{,}08\left[\frac{nF}{m}\right]$$

1.5. Odrediti unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika koaksijalnog kabla (*b*) čiji je unutrašnji provodnik poluprečnika a=5[mm], tako da pri naponu U_{12}=[9KV] najveća jačina elektrostatičkog polja bude $Emax=3\cdot10^6$[V/m].

Rezultat: b=9,1[mm]

1.6. Pločastom vazdušnom kondenzatoru kapacitivnosti C_0=200[pF], čiji je napon između elektroda U_0=200[V], rastojanje između elektroda smanji se sa d_0=8[mm] na d_1=4[mm], pri konstantnom naponu između elektroda kondenzatora.

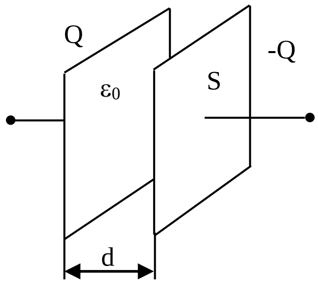
Odrediti:

a) priraštaj naelektrisanja elektroda kondenzatora;

b) priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora.

Rešenje:

Pločasti vazdušni kondenzator prikazan je na slici 1.6.1.



Slika 1.6.1. Pločasti vazdušni kondenzator

a) Kapacitivnost pločastog kondenzatora je: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d}$, gde je ε_r relativna dielektrična konstanta sredine, *S* površina ploče, a *d* rastojanje između ploča pločastog kondenzatora.

S obzirom da je reč o vazdušnom kondenzatoru, ε_r=1. U zadatku se površina ploča ne menja (*S* ostaje isto), već samo rastojanje između njih (sa d_0 na d_1). Promena rastojanja između ploča kondenzatora dovodi i do promene kapacitivnosti kondenzatora, sa C_0 na C_1, gde je:

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d_0} \quad \text{i} \quad C_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d_1}.$$

Sada je:

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{d_0}{d_1} = 2,$$

odakle se dobija kapacitivnost kondenzatora posle pomeranja njegove ploče:

$$C_1\text{=400[pF]}.$$

Kako je kapacitivnost kondenzatora po definiciji: $C = \frac{Q}{U}$, promena kapacitivnosti, uz nepromenjeni napon (uslov zadatka), mora dovesti do promene količine naelektrisanja na pločama kondenzatora, sa Q_0 na Q_1, gde je:

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0 = 200[pF] \cdot 200[V] = 40[nC] \quad \text{i}$$
$$Q_1 = C_1 \cdot U_0 = 400[pF] \cdot 200[V] = 80[nC].$$

Priraštaj naelektrisanja elektroda kondenzatora, pri ovim uslovima, je:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = 40[nC].$$

b) Elektrostatička energija kondenzatora je: $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$, gde je C kapacitivnost kondenzatora, a U napon na kondenzatoru.

U ovom zadatku, priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora, nakon pomeranja njegovih ploča, pri fiksiranom naponu, je:

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 - \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = 4[\mu J].$$

1.7. Između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora površine S=40[cm^2] i rastojanja d=4[mm], uspostavljena je potencijalna razlika U=500[V].

a) Odrediti jačinu, pravac i smer elektrostatičke sile na elektrode kondenzatora.

b) Odrediti rad te elektrostatičke sile, ukoliko se jedna elektroda kondenzatora translatorno pomeri za x=1[mm].

Rešenje:

a) Sila koja deluje na ploče kondenzatora je privlačna i upravna na elektrode (ploče) kondenzatora. Intenzitet sile jednak je parcijalnom izvodu energije po koordinati x, odnosno:

$$F = \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| = \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{2} C \cdot U^2 \right| = \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{x} \cdot U^2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{x^2} \cdot U^2$$

Kako se ploče nalaze na međusobnom rastojanju d=4[mm], sila koja deluje na ploče dobija se zamenom $x = d = 4[mm]$ u dobijeni izraz za silu:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d^2} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-6}} \cdot 500^2 = 0{,}276[mN].$$

b) Rad koji izvrši elektrostatička sila pri pomeranju ploče kondenzatora za x=1[mm], jednak je priraštaju elektrostatičke energije kondenzatora pri pomeranju ploče kondenzatora:

$$A = \Delta W = W_1 - W_0 = \frac{1}{2} C_1 U^2 - \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{U^2}{2}(C_1 - C_0)$$

Kako je: $C_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d-x}$ i $C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$,

sledi: $C_1 - C_0 = \varepsilon_0 \cdot S \cdot (\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d}) = \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{x}{d \cdot (d-x)}$.

Sada je: $A = \Delta W = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{x}{d \cdot (d-x)} = 0{,}368[\mu J]$.

Do istog rezultata se moglo doći i korišćenjem definicionog izraza za rad: $A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

Izraz za silu određen je u tački a), tako da je:

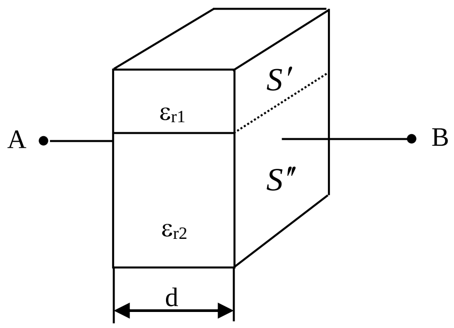
$$A = \int_d^{d-x} \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{x^2} \cdot U^2 \cdot dx = 0{,}368[\mu J] \quad .$$

1.8. Pločasti kondenzator ispunjen je sa dva dielektrika kao na slici 1.8.1., gde su:
S'=10[cm^2]; S''=15[cm^2]; d=1[mm]; ε_{r1}=3; ε_{r2}=5.

Naelektrisanja ploča kondenzatora su Q_1=-Q_2=[4nC]. Odrediti:

a) vektor jačine električnog polja i električnog pomeraja;

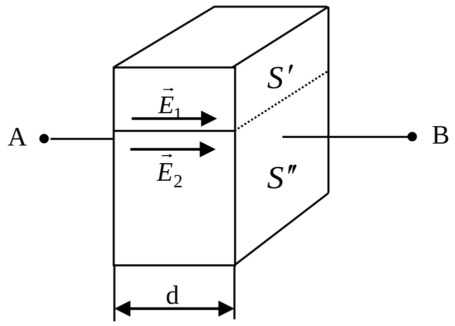
b) kapacitivnost ovog kondenzatora.



Slika 1.8.1.

Rešenje:

a) Pošto je razdvojna površina dva dielektrika normalna na ploče kondenzatora, to je vektor jačine električnog polja tangencijalan na tu razdvojnu površinu (slika 1.8.2.).



Slika 1.8.2.

Iz graničnih uslova sledi:

$$E_{1t}=E_{2t}=E$$

Kako je kod homogenih linearnih dielektrika:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

za dielektrike 1 i 2 važi:

$$\vec{D}_1 = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\vec{E}$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\vec{E}$$

Primenom Gausovog zakona,

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = Q$$

ima se:

$$D_1S^{/}+D_2S^{//}=Q$$

$$(\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S^{/}+\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S^{//})E=Q$$

Iz čega proizilazi:

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot S^{/}+\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r 2\cdot S^{//}},$$

$$E=\frac{4\cdot 10^{-9}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10\cdot 10^{-4}+8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 5\cdot 15\cdot 10^{-4}}=\frac{4\cdot 10^{-5}}{929{,}25\cdot 10^{-12}}=43045{,}47\left[\frac{V}{m}\right].$$

Intenziteti vektora električnog pomeraja su:

$D_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E=8{,}85\approx 10^{-12}\approx 3\approx 43045{,}47=1142857{,}14\approx 10^{-12}[C/m^2]$

$D_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E=8{,}85\approx 10^{-12}\approx 5\approx 43045{,}47=1904761{,}91\approx 10^{-12}[C/m^2]$

b) Da bi se odredila kapacitivnost kondenzatora, potrebno je odrediti napon između ploča kondenzatora 1 i 2, odnosno:

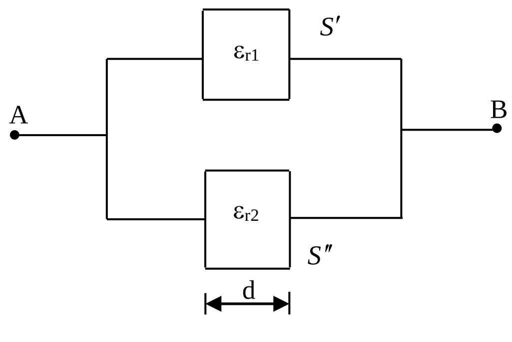
$$U_{12}=\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{l}=E\cdot d=\frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot S^{/}+\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot S^{//}}\cdot d=43{,}045[V]$$

Kapacitivnost kondenzatora je:

$C=Q/U_{12}=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S'/d+\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S''/d=92{,}93\approx 10\text{-}12[F]$

Analizirajući gore navedeni izraz vidi se da se ovaj kondenzator može pretstaviti kao paralelna veza dva kondenzatora (slika 1.8.3.) čije su kapacitivnosti:

$C'=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S'/d$ i $C''=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S''/d$



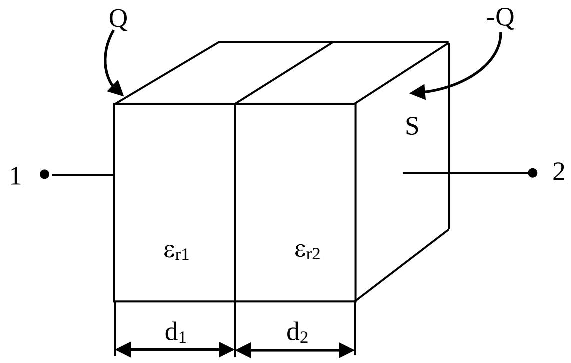
Slika 1.8.3.

1.9. U pločastom kondenzatoru, koji ima površine ploča S=20[cm^2] i naelektrisanje na pločama Q_1=-Q_2=Q=10[nC], nalaze se dva homogena dielektrika debljine d_1=2[mm] i d_2=3[mm]. Razdvojna površina dielektrika je paralelna pločama kondenzatora, kao na slici 1.8.1. Relativne dielektrične konstante ovih dielektrika su: ε_{r1}=3 i ε_{r2}=9.

Odrediti:

a) vektor dielektričnog pomeraja i vektor jačine električnog polja;

b) kapacitivnost ovog kondenzatora.



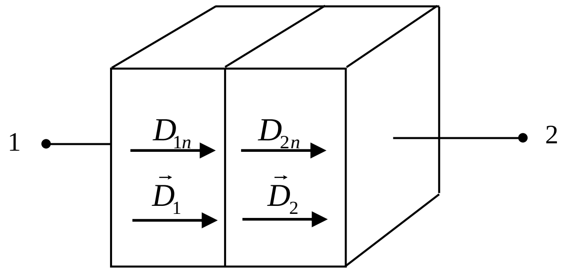
Slika 1.9.1.

Rešenje:

S obzirom da je razdvojna površina između dielektrika paralelna pločama kondenzatora i da su vektor jačine električnog polja i vektor dielektričnog pomeraja upravni na ploče kondenzatora, to su vektori jačine električnog polja i dielektričnog pomeraja upravni i na razdvojnu površinu dielektrika. Znači da na površini koja razdvaja dielektrike ovi vektori imaju samo normalnu komponentu $E=E_n$ i $D=D_n$ (E_{tang}=0 i D_{tang}=0). Iz graničnih uslova, na razdvojnoj površi je $D_{1n}=D_{2n}$, a kako u ovom slučaju vektor dielektričnog pomeraja ne zavisi od rastojanja od elektroda, znači da je vektor dielektričnog pomeraja isti u oba dielektrika. Njegov intenzitet je:

$$D_{1n} = D_{2n} = D = \frac{Q}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-9} C}{20 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

Pravac i smer je upravan na ploče kondenzatora.



Slika 1.9.2.

Jačine električnog polja različite su u dielektricima:

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 3} = 0{,}188 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$$

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 9} = 0{,}063 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$$

Pravac i smer vektora jačine električnog polja upravan je na ploče kondenzatora.

Napon između pozitivne i negativne ploče kondenzatora je:

$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \cdot d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \cdot d_2 \approx 564V$$

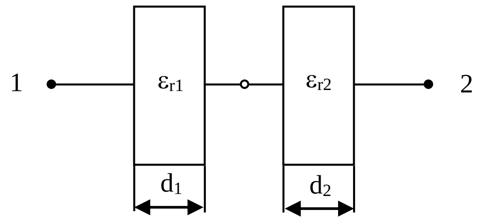
Kapacitivnost kondenzatora određuje se iz:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{D \cdot S}{U_{12}} = \frac{D \cdot S}{D \cdot (\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}})} = 17{,}7 \cdot 10^{-12} F = 17{,}7 pF$$

Ukoliko se posmatra recipročna vrednost:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \cdot S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \cdot S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Vidi se da se ovaj kondenzator može predstaviti rednom vezom dva kondenzatora, kapacitativnosti C_1 i C_2, kao na slici 1.9.3.



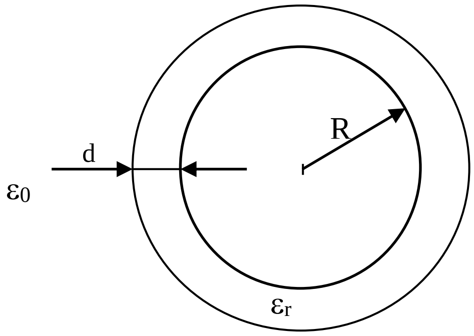
Slika 1.9.3.

1.10. Oko metalne lopte, poluprečnika R i naelektrisanja Q (Q>0) nalazi se homogeni dielektrik, relativne dielektrične konstante ε_r, debljine d.

Odrediti i grafički prikazati:

a) vektor električnog pomeraja $\vec{D}$

b) vektor jačine električnog polja $\vec{E}$.



Slika 1.10.1.

Rešenje:

a) Intenzitet vektora dielektričnog pomeraja $\vec{D}$ određuje se primenom Gausovog zakona:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q_{u\,S}$$

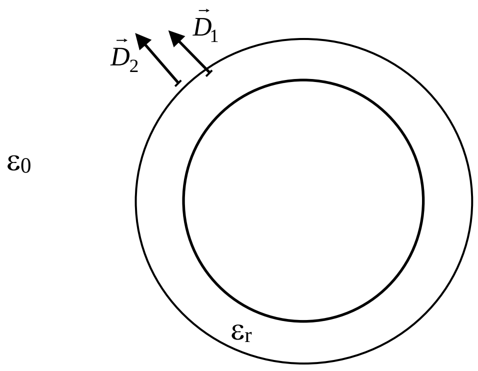
odnosno:

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q$$

odakle se dobija:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Imajući u vidu da vektor $\vec{D}$ ima samo normalnu komponentu na razdvojnu površinu dielektrika, znači da je $D=D_n$.



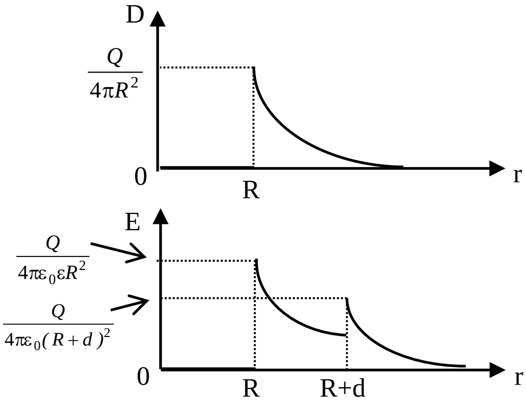
Slika 1.10.2.

Iz graničnih uslova neposredno uz razdvojnu površinu dielektrika, ali sa različitih strana je: $D_{1n}=D_{2n}=D$. Znači, vektor $\vec{D}$ i u dielektriku i u vakumu ima isti intenzitet $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$, a pravac i smer je radijalan.

b) Za $r < R$: $E=0$ jer unutar lopte ne postoji naelektrisanje ($Q=0$).

Za $R< r \le R+d$: U dielektriku, vektor jačine električnog polja ima intenzitet $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot r^2}$, a pravac i smer je radijalan.

Za $R+d < r$: Intenzitet vektora jačine električnog polja u ovom slučaju je $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$, a pravac i smer je radijalan.



Slika 1.10.3.

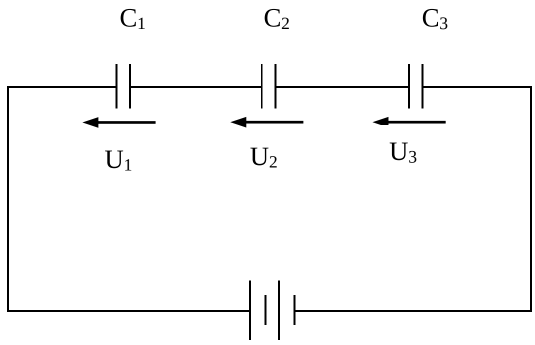
1.11. Na izvor napona 100[V] priključena su tri redno vezana kondenzatora nepoznatih kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3 (slika 1.11.1.). Izmereni naponi na ovim kondenzatorima su: 20[V], 30[V] i 50[V], respektivno, a količina elektriciteta na svakom od njih je Q=300[μC].

Odrediti:

a) nepoznate kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3;

b) ekvivalentnu kapacitivnost ove redne veze kondenzatora;

b) ukupnu energiju ovog sistema kondenzatora.



Slika 1.11.1.

Rezultat:

a)

$$C_1 = \frac{Q}{U_1} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{20}[F] = 15[\mu F]$$

$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{30}[F] = 10[\mu F]$$

$$C_3 = \frac{Q}{U_3} = \frac{300 \cdot 10^{-6}}{50}[F] = 6[\mu F]$$

b)

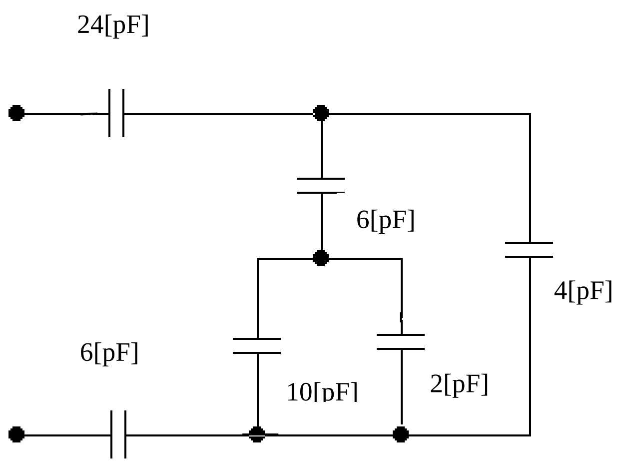
$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6}}$$

$$C_{ekv} = 3[\mu F]$$

c)

$$W = \frac{1}{2} \cdot C_{ekv} \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} F \cdot (20 + 30 + 50)^2 V = \frac{1}{2} \cdot C_{ekv} \cdot 100^2 = 15[mJ]$$

1.12. Naći ekvivalentnu kapacitivnost mreže kondenzatora prikazane na slici 1.12.1.



Slika 1.12.1.

Rezultat:

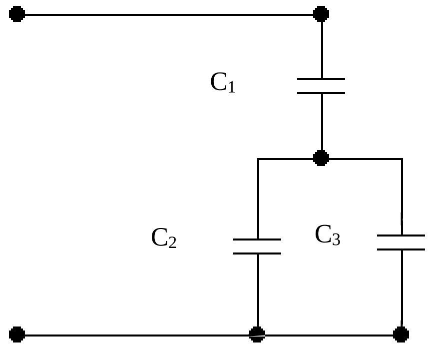
$$Cekv = 3[pF].$$

1.13. Tri kondenzatora, C_1=6[μF], C_2=3[μF] i C_3=1[μF], vezana kao na slici 1.13.1., priključena su na izvor napona 100[V].

Odrediti:

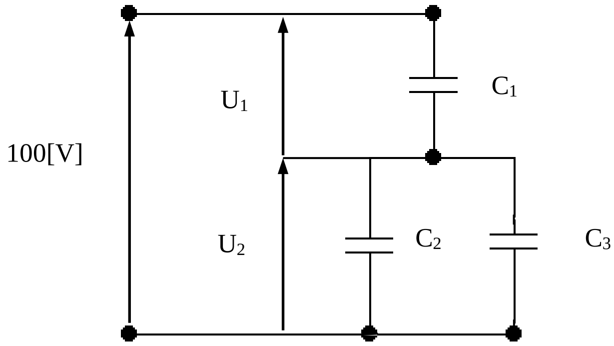
a) količinu elektriciteta na svakom od kondenzatora;

b) energiju svakog kondenzatora pojedinačno, i ukupnu energiju sistema kondenzatora.



Slika 1.13.1.

Rešenje:



Slika 1.13.2.

Na slici 1.13.2. označen je napon pobude i naponi na kondenzatorima. Iz jednačine naponske ravnoteže ima se:

$$100V = U_1 + U_2 = \frac{1}{C_1}\cdot Q + \frac{1}{C_2 + C_3}\cdot Q$$

$$100V = (\frac{1}{6\cdot 10^{-6}} + \frac{1}{(3+1)\cdot 10^{-6}})\cdot Q$$

Odavde se dobija:

$$Q = 240[\mu C],$$

što predstavlja količinu elektriciteta koja odgovara kondenzatoru čija je kapacitivnost C_1 (Q=Q_1=240[μC]). Da bi se odredile količine elektriciteta preostala dva kondenzatora, potrebno je naći U_2:

$$U_2 = \frac{Q}{C_2 + C_3} = 60[V] \qquad (U_1 = U - U_2 = 40[V])$$

Dalje se lako nalazi:

$$Q_2 = U_2 \cdot C_2 = 60 \cdot 3\cdot 10^{-6} = 180[\mu C]$$

$$Q_3 = U_2 \cdot C_3 = 60 \cdot 1\cdot 10^{-}6 = 60[\mu C]$$

b)

$$W_1 = \frac{1}{2}\cdot C_1 \cdot U_1^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10^{-6}\cdot 40^2 = 4{,}8[mJ]$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\cdot C_2 \cdot U_2^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot 60^2 = 5{,}4[mJ]$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\cdot C_3 \cdot U_2^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot 60^2 = 1{,}8[mJ]$$

Ukupna energija je:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 12[mJ]$$