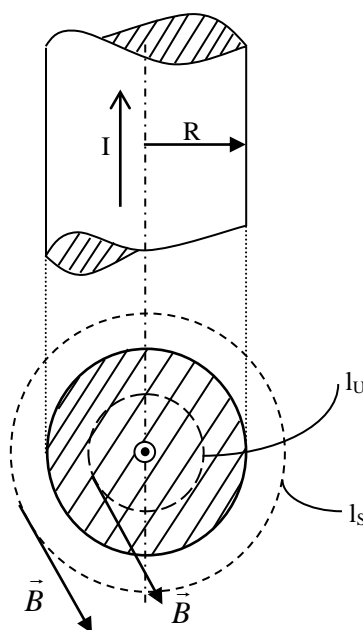


3. Elektromagnetizam

3.1. U veoma dugačkom cilindričnom bakarnom provodniku kružnog poprečnog preseka, poluprečnika R , uspostavljena je stalna struja jačine I . Smatrajući da je struja ravnomerno raspodeljena po poprečnom preseku provodnika odrediti magnetsku indukciju u provodniku i izvan njega.



Slika 3.1.1

Rešenje:

Linije magnetskog polja su u ovom slučaju koncentrični krugovi u ravnima normalnim na osu provodnika sa centrima na osi. Vektor magnetske indukcije \vec{B} ima isti intenzitet u svim tačkama jedne linije polja, a smer mu je određen pravilom desne zavojnice u odnosu na smer struje u provodniku.

Prema Amperovom zakonu, u unutrašnjosti provodnika je

$$\oint_{l_u} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S}, \text{ odnosno}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{R^2 \pi} r^2 \pi, \quad r \leq R$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad r \leq R.$$

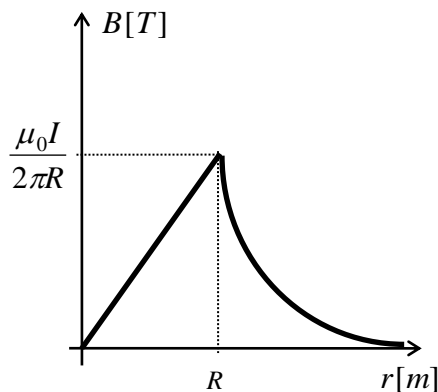
U tačkama izvan provodnika primenom Amperovog zakona dobija se

$$\oint_{l_s} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I,$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I, \quad r > R, \text{ odnosno}$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad r > R.$$

Grafik zavisnosti intenziteta magnetske indukcije od rastojanja r prikazan je na slici 3.1.2.



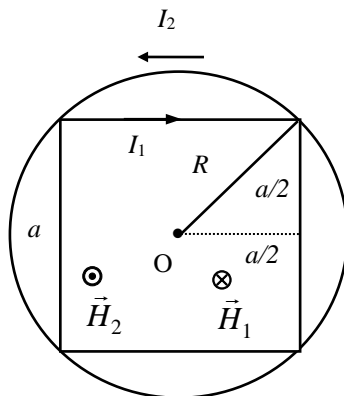
Slika 3.1.2

3.2. Kružno kolo poluprečnika R opisano je oko kvadratnog kola, stranice a , u kome teče struja $I_1=6.28[A]$ u označenom smeru. Odrediti struju I_2 , koja treba da teče u kružnom kolu da bi magnetno polje u centru O bilo jednako nuli.

Rešenje:

Stranica a kvadratnog kola dobija se iz

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad R = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \quad \text{odnosno } a = \sqrt{2} \cdot R.$$



Slika 3.2.1

Intenzitet magnetnog polja koje potiče od kvadratnog kola u centru O iznosi

$$H_1 = 4 \cdot \frac{I_1}{4\pi \cdot \frac{a}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$H_1 = \frac{2I_1}{\pi a} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot I_1}{\pi a}$$

Pravac i smer vektora \vec{H}_1 označeni su na slici 3.2.1.

U kružnom kolu se mora uspostaviti takva struja I_2 koja će u centru O stvoriti magnetno polje \vec{H}_2 koje će poništiti polje \vec{H}_1 . Koristeći dobijeni rezultat, da je u centru kružnog kola intenzitet magnetnog polja

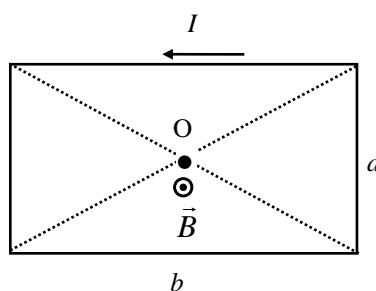
$$H = \frac{I}{2R}, \text{ sledi } H_2 = \frac{I_2}{2R}.$$

Vektor \vec{H}_2 označen je na slici i iz njegovog pravca i smera proizilazi i smer struje u kružnom kolu I_2 . Intenzitet vektora dobija se izjednačavanjem $H_1 = H_2$, odnosno

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot I_1}{\pi a} = \frac{I_2}{2R} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2} \cdot I_1}{\pi \sqrt{2} \cdot R} = \frac{I_2}{2R}, \text{ pa je konačno}$$

$$I_2 = \frac{4I_1}{\pi} = 8 [A].$$

3.3. Odrediti magnetsku indukciju u centru pravougaonog strujnog kola stranica $a=3[\text{cm}]$ i $b=4[\text{cm}]$, u vazduhu, kada kroz kolo protiče stalna jednosmerna struja $I=12.56[A]$ kao na slici.



Slika 3.3.1

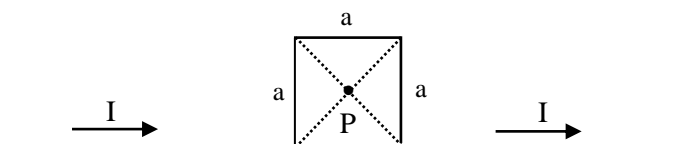
Rešenje:

Pravac vektora magnetske indukcije upravan je na ravan pravougaone konture, smer kao na slici, a intenzitet je

$$B = \frac{40\pi}{3} \cdot 10^{-5} [T].$$

3.4. Kroz veoma dugačak i tanak pravolinijski provodnik, savijen kod svoje sredine (kao na slici 3.4.1), teče stalna struja $I=0.6[\text{A}]$. Sredina je vazduh. Odrediti :

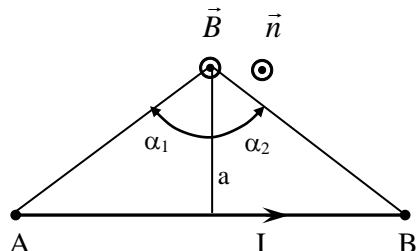
- Magnetsku indukciju u tački P posle savijanja provodnika. Smatrati da su dužine savijenih delova mnogo manje od dužine celog provodnika.
- Jačinu i smer struje u provodniku tako da magnetska indukcija u tački P bude ista kao pre savijanja provodnika.



Slika 3.4.1

Rešenje:

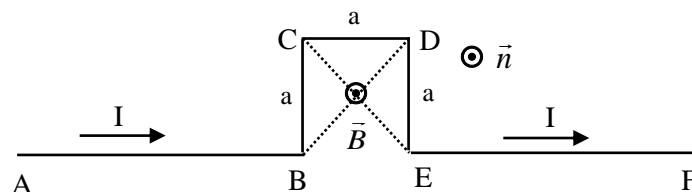
a) Kontura sa slike se sastoji iz 5 pravolinijskih segmenata. Rezultujuća magnetska indukcija u tački P jednaka je vektorskom zbiru pojedinačnih indukcija svakog segmenta ponaosob. Magnetska indukcija provodnika u obliku duži data je poznatim izrazom:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \cdot \vec{n}$$

$$\alpha_2 > 0 \quad , \quad \alpha_1 < 0$$

Primenjujući navedeni izraz na provodnik sa slike 3.4.2 dobijamo:



Slika 3.4.2

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DE} + \vec{B}_{EF} ,$$

pri čemu je:

$$\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot \vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B}_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot (-\vec{n}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sqrt{2} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B}_{CD} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot (-\vec{n}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sqrt{2} \cdot \vec{n}$$

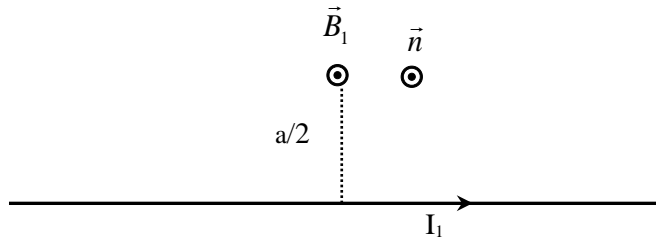
$$\vec{B}_{DE} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot (-\vec{n}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sqrt{2} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B}_{EF} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot \vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DE} + \vec{B}_{EF} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} (1 - 2\sqrt{2}) \cdot \vec{n} = -4.39[\mu T] \cdot \vec{n},$$

što znači da je stvarni smer vektora magnetske indukcije suprotan pretpostavljenom.

b)



Slika 3.4.3

Vektor magnetske indukcije za dugačak pravolinijski provodnik je

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot \vec{n} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a} \cdot \vec{n}.$$

Da bi magnetska indukcija u tački P ostala nepromenjena mora biti

$$\vec{B}_1 = \vec{B}, \text{ odnosno } \frac{\mu_0 I}{\pi a} (1 - 2\sqrt{2}) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a},$$

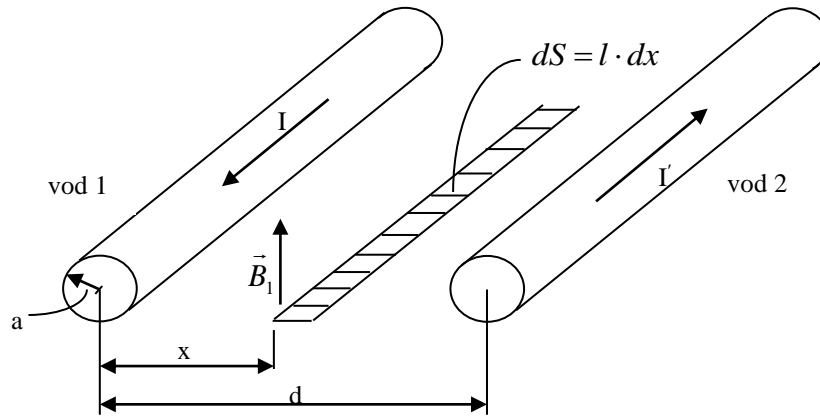
iz čega sledi da je struja

$$I_1 = I(1 - 2\sqrt{2}) = -1.097[A].$$

Negativan predznak označava da struja I_1 ima suprotan smer od struje I .

3.5. Dvožični vod, poluprečnika provodnika a i rastojanja između osa provodnika d , nalazi se u vazduhu. Odrediti spoljašnju podužnu induktivnost voda, smatrajući da se struja ravnomerno raspoređuje po porečnom preseku voda.

Rešenje:



Slika 3.5.1. Dvožični vod

Da bi se odredila induktivnost dvožičnog voda, potrebno je naći vektor magnetske indukcije \vec{B} koji je jednak zbiru vektora magnetske indukcije voda 1 i voda 2:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}.$$

Izračunaće se zatim magnetski fluks, to jest fluks vektora \vec{B} kroz zamišljenu površinu dS , gde je $dS = dx \cdot l$.

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = 2 \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a} = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Podužna induktivnost dvožičnog voda definiše se kao:

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{I \cdot l},$$

pa je:

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

U slučaju da je $d \ll a$ ovaj obrazac postaje:

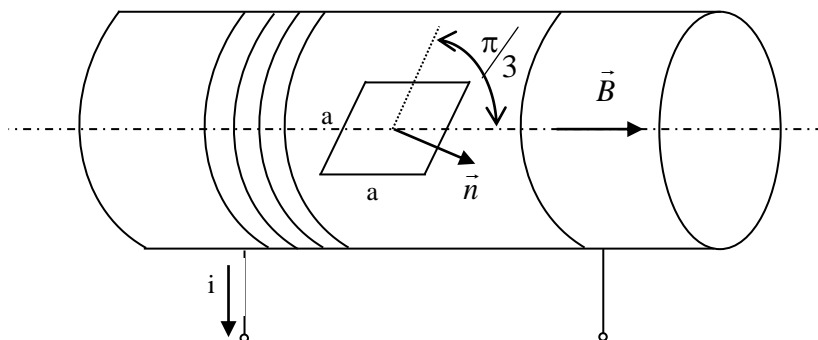
$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

3.6. Solenoid dužine $d = 40\text{cm}$ ima $N = 300$ ravnomerno i gusto namotanih zavoja. Struja koja je u solenoidu uspostavljena menja se u vremenu:

$$i = 10 e^{-1000t} (\text{A}).$$

U sredini solenoida nalazi se kvadratno kolo stranice $a = 2\text{cm}$. Odrediti indukovanu elektromotornu silu u tom kvadratnom kolu.

Rešenje:



Slika 3.6.1 Solenoid sa kvadratnim kolom u sredini

U samom solenoidu postoji magnetna indukcija čiji je intenzitet:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 300 \cdot 10 \text{A} \cdot e^{-1000t}}{0,4\text{m}} = 3\pi \cdot 10^{-3} \text{T} \cdot e^{-1000t} = 3\pi \text{ mT} \cdot e^{-1000t} = B(t).$$

Za kvadratno kolo se usvaja smer normale kao na slici, pa je magnetski fluks kroz kvadratno kolo:

$$\begin{aligned} \Phi &= B \cdot S \cdot \cos \angle(\vec{B}, \vec{n}) = B \cdot a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\mu_0 N i}{d} \cdot a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 3\pi \cdot 10^{-3} \text{T} \cdot e^{-1000t} \cdot (2 \cdot 10^{-2} \text{m})^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ \Phi &= 12\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-7} \text{Wb} \cdot e^{-1000t} = 6\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{Wb} \cdot e^{-1000t} \end{aligned}$$

Indukovana elektromotorna sila (EMS) u kvadratnom kolu za referentni smer označen na slici je:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N a^2 \cos \frac{\pi}{6}}{d} \cdot \frac{di}{dt}$$

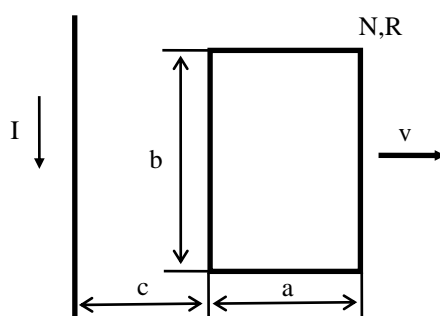
$$e = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 300 (2 \cdot 10^{-2} m)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,4m} \cdot 10 A (-1000 Hz) e^{-1000t} = \pi \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{-4} HA Hz e^{-1000t}$$

$$e = 6\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-4} \frac{HA}{s} e^{-1000t} = 6\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-4} V e^{-1000t} \approx 32,65 \cdot 10^{-4} V e^{-1000t}$$

$$e = e(t) = 6\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-4} V e^{-1000t} \approx 3,26 \text{ mV } e^{-1000t}$$

3.7. Kroz veoma dug pravolinijski provodnik teče konstantna struja $I=100[A]$ u smeru prikazanom na slici. Kruta, provodna kontura sa $N=1000$ navojaka leži u ravni provodnika u položaju datom na slici u trenutku $t=0$, a zatim počinje da se kreće translatorno, konstantnom brzinom $v=10[m/s]$, u označenom smeru. Brojni podaci $a=10[cm]$, $b=15[cm]$ i $c=5[cm]$. Odrediti:

- Magnetni fluks konture u funkciji vremena
- Indukovanu ems u konturi u funkciji vremena
- Mehaničku silu koja pokreće konturu u funkciji vremena, pod pretpostavkom da je otpornost konture $R=150[\Omega]$ i da se njena induktivnost može zanemariti.



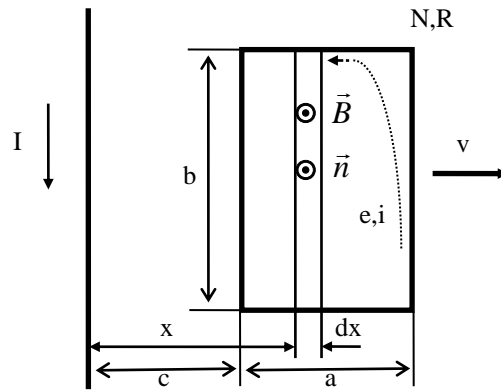
Slika 3.7.1

Rešenje:

- Intenzitet vektora magnetske indukcije B na rastojanju x od dugačkog pravolinijskog provodnika sa strujom I iznosi:

$$B(x) = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}.$$

Pravac i smer vektora \vec{B} su kao na slici 3.7.2. Elementarni magnetni fluks vektora B



Slika 3.7.2

kroz površinu $dS = b dx$, na kojoj normala \vec{n} ima isti smer kao i vektor B je

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B b dx \cos \angle(\vec{B}, \vec{n}) = B b dx = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} b dx.$$

Fluks kroz jedan navojak Φ izračunava se integracijom elementarnog fluksa $d\Phi$:

$$\Phi(t) = \int d\Phi(t) = \int_{c+vt}^{a+c+vt} \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} \ln \frac{a+c+vt}{c+vt}.$$

S obzirom da se kontura kreće konstantnom brzinom v granice integracije se menjaju u funkciji vremena t , počevši od polaznog položaja za $t=0$. Ukupan magnetni fluks kroz N navojaka konture je onda

$$\Phi_N(t) = N\Phi(t) = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} N \ln \frac{a+c+vt}{c+vt} = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} N \ln \left(1 + \frac{a}{c+vt}\right).$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$\Phi(t) = 3 \cdot 10^{-3} \ln \left(1 + \frac{0.1}{0.05 + 10t}\right) [\text{Wb}].$$

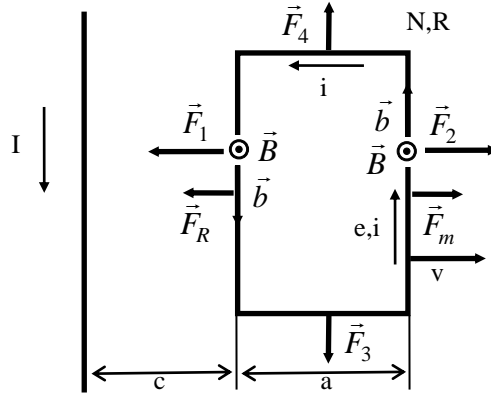
b) Indukovana elektromotorna sila u N navojaka konture izračunava se primenom Faradejevog zakona:

$$e(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{Ib}{2\pi} N^2 \frac{d}{dt} \ln \left(1 + \frac{a}{c+vt}\right) = -\mu_0 \frac{Ib}{2\pi} N^2 \frac{1}{1 + \frac{a}{c+vt}} \left[-\frac{av}{(c+vt)^2} \right].$$

Smer ems određuje se prema istom referentnom smeru korišćenom pri izračunavanju fluksa i obeležen je na slici. Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$e(t) = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} N^2 v \frac{a}{(c+vt)(a+c+vt)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{100t^2 + 2t + 7.5 \cdot 10^{-5}} [\text{V}].$$

c) Kroz provodnu konturu protiče struja $i(t) = e(t)/R$ u smeru označenom na slici 3.7.3. Na svaku stranicu konture deluje elektromagnetna sila $d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$.



Slika 3.7.3

Sile \vec{F}_3 i \vec{F}_4 , zbog simetrije, imaju isti intenzitet i pravac a suprotne smerove, te se uzajmno poništavaju. Vektor magnetne indukcije je homogen duž stranica konture koje su paralelne provodniku sa strujom I . Elektromagnetna sile koja deluje na stranicu konture bližu dugačkom provodniku sa strujom je

$$\vec{F}_1 = i(t) \vec{b} \times \vec{B}(c + vt),$$

a sila koja deluje na suprotnu stranicu konture je

$$\vec{F}_2 = i(t) \vec{b} \times \vec{B}(a + c + vt).$$

Pravac i smer sila je obeležen na slici. Intenzitet rezultatne elektromagnetne sile na konturu je

$$F_R(t) = F_1(t) - F_2(t) = i(t)b[B(c + vt) - B(a + c + vt)] = \frac{e(t)}{R} b \mu_0 \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{c + vt} - \frac{1}{a + c + vt} \right],$$

što posle sređivanja daje

$$F_R = \left[\mu_0 \frac{IbN}{2\pi} \right]^2 \frac{v}{R} \left[\frac{a}{(c + vt)(a + c + vt)} \right]^2.$$

Da bi se kontura kretala konstantnom brzinom v potrebno je da na nju deluje mehanička sila

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_R,$$

koja će uravnotežavati dejstvo rezultatne elektromagnetne sile. Pravac i smer sile obeležen je na slici. Intenzitet mehaničke sile, nakon zamene brojnih vrednosti iznosi

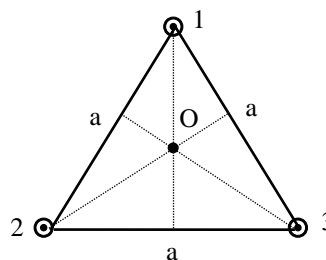
$$F_m = \frac{6 \cdot 10^{-13}}{(t^2 + 2 \cdot 10^{-2}t + 7.5 \cdot 10^{-5})^2} [N].$$

3.8. Kroz tri paralelna, veoma duga pravolinijska provodnika koji leže u temenima jednakostraničnog trougla kao na slici, teku trofazne struje

$$i_1 = I_m \sin \omega t$$

$$i_2 = I_m \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

$$i_3 = I_m \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$$



$I_m=10[\text{A}]$, $a=0.5[\text{m}]$, $f=50[\text{Hz}]$. Odrediti

a) Mehaničku podužnu silu koja deluje na drugi provodnik u trenutku $t_1=0$ i $t_2=\pi/\omega$.

b) Intenzitet, pravac i smer vektora magnetne indukcije \vec{B} , u tački O, koja potiče od struja i_1 , i_2 i i_3 u trenutku $t_1=0$ i $t_2=\pi/\omega$.

Tačka O je centar kruga opisanog oko trougla.

Rešenje:

U trenutku $t_1=0$ struje i_1 , i_2 i i_3 su

$$i_1=0,$$

$$i_2=I_m \sin(2\pi/3)= 0.866 I_m=8.66 [\text{A}]$$

$$i_3=I_m \sin(4\pi/3)= (-0.866) I_m=-8.66 [\text{A}].$$

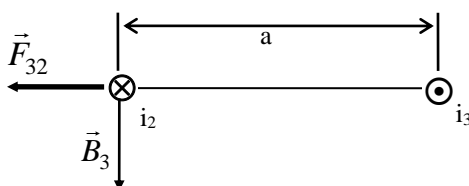
U trenutku $t_2=\pi/\omega$ struje i_1 , i_2 i i_3 su

$$i_1=I_m \sin(\omega\pi/\omega)=I_m \sin\pi=0$$

$$i_2=I_m \sin(5\pi/3)= (-0.866) I_m=-8.66 [\text{A}]$$

$$i_3= I_m \sin(7\pi/3)= 0.866 I_m=8.66 [\text{A}].$$

a) Za $t_1=0$, postoje jedino struje i_2 i i_3 sa smerovima kao na slici 3.8.1.



Slika 3.8.1

Provodnik 2 nalazi se u magnetnom polju provodnika 3, čiji je intenzitet magnetne indukcije

$$B_3 = \frac{\mu_0 i_3}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{\text{Tm}}{\text{A}}] \cdot 8.66 [\text{A}]}{2\pi \cdot 0.5[\text{m}]} = 34.64 \cdot 10^{-7} [\text{T}],$$

a pravac i smer prikazani na slici. Sila na drugi provodnik je onda

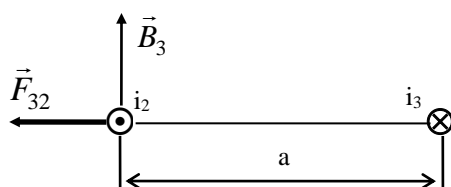
$$\vec{F}_{32} = i_2 \vec{l} \times \vec{B}_3,$$

odnosno intenzitet podužne sile je

$$\frac{F_{32}}{l} = i_2 B_3 = 8.66 \cdot 34.64 \cdot 10^{-7} \text{ N} = 30 [\mu\text{N}],$$

sa pravcem i smerom kao na slici 3.8.2.

Za trenutak $t_2 = \pi/\omega$



Slika 3.8.2

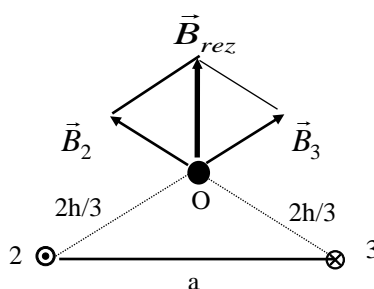
$$\frac{F_{32}}{l} = i_2 B_3 = 8.66 \cdot 34.64 \cdot 10^{-7} [\text{N}] = 30 [\mu\text{N}],$$

pravac i smer vektora \vec{B}_3 i \vec{F}_{32} označeni su na slici .

b) Rastojanje tačke O od provodnika 1, 2 i 3 je $2h/3$, pri čemu je $h^2 = \frac{3a^2}{4}$, odnosno

$h = 0.433[\text{m}]$, pa je $\frac{2h}{3} = 0.2887[\text{m}]$.

Za $t_1 = 0$



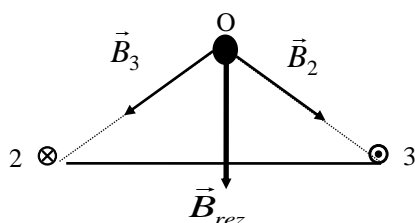
Slika 3.8.3

$$|B_2| = |B_3| = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi \cdot \frac{2h}{3}} = \frac{\mu_0 i_3}{2\pi \cdot \frac{2h}{3}} = 6[\mu\text{T}].$$

$$B_{rez} = B_3 \cos 60^\circ + B_2 \cos 60^\circ = 6[\mu\text{T}],$$

sa pravcem i smerom kao na slici 3.8.3.

Za trenutak $t_2 = \pi/\omega$,



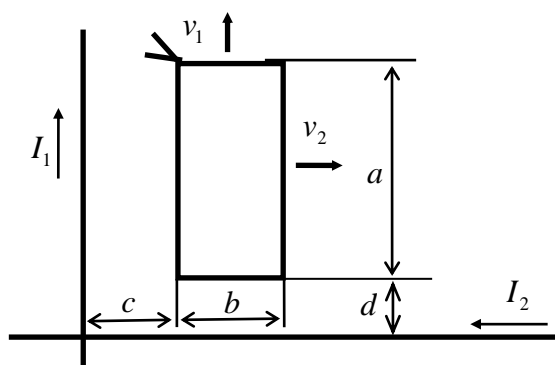
Slika 3.8.4

$$B_{rez} = 6[\mu\text{T}].$$

3.9. Dva veoma duga pravolinijska provodnika nalaze se u vazduhu i leže u ravni crteža kao što je prikazano na slici 3.9.1. U pravolinijskim provodnicima teku konstantne struje $I_1 = 5[A]$ i $I_2 = 2[A]$ za referentne smerove prikazane na slici. U ravni crteža nalazi se i pravougaono kolo koje je kruta otvorena provodna kontura. Pravougaono kolo može da se pomera u ravni crteža u horizontalnom i vertikalnom pravcu. Odrediti magnetni fluks kroz pravougaono kolo i elektromotornu silu indukovanu u njemu ako se pravougaono kolo:

- nalazi u položaju datom na slici 3.9.1.,
- kreće translatorno, konstantnom brzinom $v_1 = 3[m/s]$ u označenom smeru a početni položaj u trenutku $t = 0$ je prikazan na slici 3.9.1.,
- kreće translatorno, konstantnom brzinom $v_2 = 1[m/s]$ u označenom smeru a početni položaj u trenutku $t = 0$ je prikazan na slici 3.9.1.

Brojni podaci $a = 28,5[cm]$, $b = 14[cm]$, $c = 12[cm]$ i $d = 8[cm]$.



Slika 3.9.1.

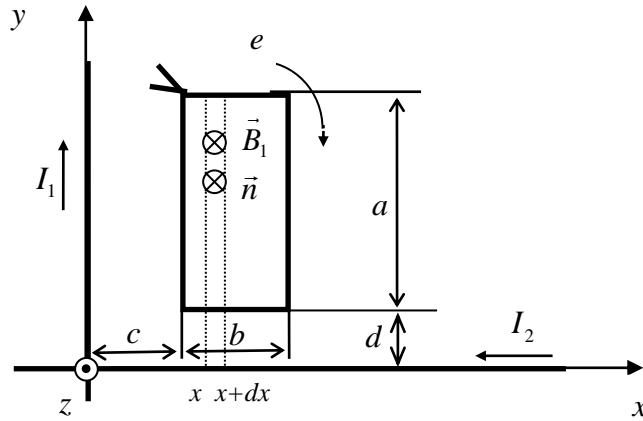
Rešenje:

a) Magnetsko polje koje potiče od oba provodnika odredimo primenom principa superpozicije, što je dozvoljeno pošto se provodnici nalaze u linearnoj sredini - u vazduhu.

Magnetska indukcija \vec{B}_1 koja potiče od provodnika 1 ima pravac i smer kao na slici 3.9.2. Intenzitet $B_1(x)$ ovog vektora na rastojanju x od dugačkog pravolinijskog provodnika sa strujom I_1 iznosi:

$$B_1(x) = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi x},$$

gde je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]$ magnetna permeabilnost vakuuma odnosno vazduha.



Slika 3.9.2.

Elementarni magnetni fluks vektora \vec{B}_1 kroz površinu $dS=a \cdot dx$, na kojoj normala \vec{n} ima isti smer kao i vektor \vec{B}_1 je:

$$d\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = B(x) \cdot a \cdot dx \cdot \cos \angle(\vec{B}_1, \vec{n}) = B_1 \cdot a \cdot dx = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi x} a \cdot dx.$$

Fluks kroz konturu koji potiče samo od struje prvog provodnika je Φ_1 a izračunava se integracijom elementarnog fluksa $d\Phi_1$ po površini S oslonjenoj na pravougaonu konturu:

$$\Phi_1 = \int_S d\Phi_1 = \int_c^{c+b} \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}.$$

Na sličan način magnetska indukcija \vec{B}_2 koja potiče od provodnika 2 ima pravac i smer kao na slici 3.9.3. Intenzitet $B_2(x)$ ovog vektora na rastojanju y od provodnika sa strujom I_2 je:

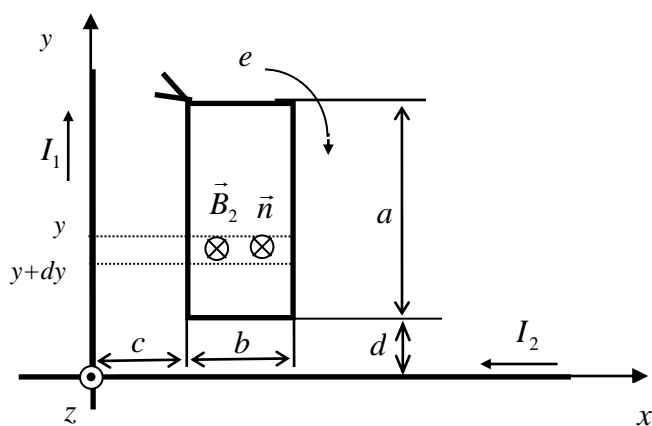
$$B_2(y) = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi y}.$$

Elementarni magnetni fluks vektora \vec{B}_2 kroz površinu $dS=b \cdot dy$, na kojoj vektor normale \vec{n} i vektor \vec{B}_2 imaju smerove kao na slici 3.9.3. je:

$$d\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = B(y) \cdot b \cdot dy \cdot \cos \angle(\vec{B}_2, \vec{n}) = B_2 \cdot b \cdot dy = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi y} b \cdot dy.$$

Magnetski fluks kroz pravougaonu konturu koji potiče samo od struje drugog provodnika je Φ_2 a izračunava se integracijom elementarnog fluksa $d\Phi_2$ po površini S oslonjenoj na pravougaonu konturu:

$$\Phi_2 = \int_S d\Phi_2 = \int_d^{d+a} \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \frac{dy}{y} = \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$



Slika 3.9.3.

Ukupan magnetni fluks kroz pravougaono kolo, računat za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slikama 3.9.2. i 3.9.3. je onda:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{b+c}{c} + \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[I_1 \cdot a \cdot \ln \left(\frac{b}{c} + 1 \right) + I_2 \cdot b \cdot \ln \left(\frac{a}{d} + 1 \right) \right].$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}}{2\pi} \left[5A \cdot 28,5cm \cdot \ln \left(\frac{14cm}{12cm} + 1 \right) + 2A \cdot 14cm \cdot \ln \left(\frac{28,5cm}{8cm} + 1 \right) \right] \cong 0,31[\mu Wb].$$

Indukovana elektromotorna sila u pravougaonoj konturi izračunava se primenom Faradejevog zakona. Ako je smer ems prema pravilu desne zavojnice povezan sa referentnim smerom za računanje fluksa Φ (a to je smer orta normale \vec{n} kao na slikama 3.9.2. i 3.9.3.) onda je, prema Faradejevom zakonu, indukovana elektromotorna sila jednaka:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ems indukovana u pravougaonoj konturi za referentni smer obeležen na slikama 3.9.2. odnosno 3.9.3. je:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0[V],$$

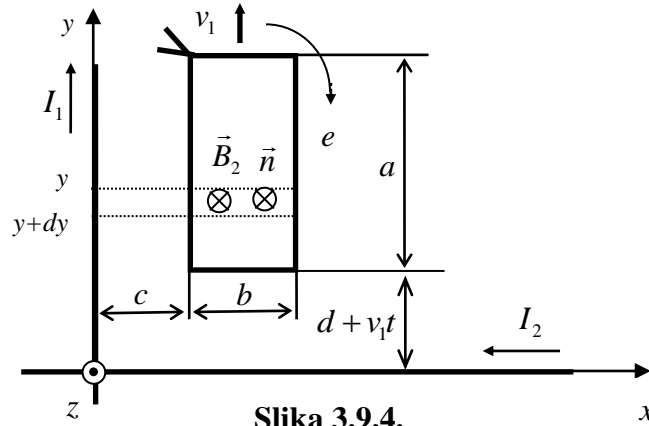
pošto je magnetski fluks $\Phi = 0,31[\mu Wb]$ kroz tu konturu konstantan tokom vremena.

b) Kada se pravougaona kontura kreće translatorno, konstantnom brzinom $v_1 = 3[m/s]$ u smeru označenom na slici 3.9.1., relativni položaj pravougaone konture se ne menja u odnosu na provodnik 1, pošto su provodnici sa strujama beskonačno dugački. Zato magnetski fluks $\Phi_1(t)$, koji kroz pravougaonu konturu stvara struja prvog provodnika, ima istu vrednost kao pod tačkom a) kada kontura miruje a to je:

$$\Phi_1(t) = \int_c^{c+b} \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c},$$

ako se fluks računa za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slici 3.9.4. Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\Phi_1(t) = \text{const} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \frac{5A \cdot 28,5cm}{2\pi} \ln \frac{12cm + 14cm}{12cm} \approx 0,22 [\mu Wb].$$



Slika 3.9.4.

U nekom trenutku t pravougaono kolo se nalazi u položaju prikazanom na slici 3.9.4. Magnetski fluks koji kroz pravougaonu konturu stvara samo struja drugog provodnika je $\Phi_2(t)$ a izračunava prema:

$$\Phi_2(t) = \int_S d\Phi_2(t) = \int_{d+v_1t}^{d+v_1t+a} \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \frac{dy}{y} = \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{d+v_1t+a}{d+v_1t},$$

ako se fluks računa za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slici 3.9.4. Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\Phi_2(t) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \frac{2A \cdot 14cm}{2\pi} \ln \frac{8 \cdot 10^{-2}m + 3 \frac{m}{s} t + 28,5 \cdot 10^{-2}m}{8 \cdot 10^{-2}m + 3 \frac{m}{s} t},$$

gde je t vreme, odnosno za vreme t u sekundama:

$$\Phi_2(t) = 0,056 \cdot \ln \frac{3 \cdot t + 0,365}{3 \cdot t + 0,08} [\mu Wb].$$

Ukupan magnetni fluks kroz pravougaono kolo u trenutku t , računat za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slici 3.9.4. je:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{b+c}{c} + \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{a+d+v_1 \cdot t}{d+v_1 \cdot t}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$\Phi(t) \approx 0,22 + 0,056 \cdot \ln \frac{3 \cdot t + 0,365}{3 \cdot t + 0,08} [\mu\text{Wb}],$$

za vreme t u sekundama.

Indukovana elektromotorna sila u pravougaonoj konturi izračunava se primenom Faradejevog zakona. Ako je smer ems prema pravilu desne zavojnice povezan sa referentnim smerom za računanje fluksa Φ (a to je smer orta normale \vec{n} kao na slici 3.9.4.) onda je, prema Faradejevom zakonu, indukovana elektromotorna sila jednaka:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt},$$

a to je:

$$e(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -\mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \frac{d + v_1 t}{d + v_1 t + a} \frac{v_1 (d + v_1 t) - v_1 (d + v_1 t + a)}{(d + v_1 t)^2},$$

odnosno:

$$e(t) = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot a \cdot b \cdot v_1}{2\pi (d + v_1 t + a) \cdot (d + v_1 t)}.$$

Posle zamene brojnih vrednosti dobija se:

$$e(t) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 2A \cdot 28,5 \cdot 10^{-2} m \cdot 14 \cdot 10^{-2} m \cdot 3 \frac{m}{s}}{2\pi \left(8 \cdot 10^{-2} m + 3 \frac{m}{s} \cdot t + 28,5 \cdot 10^{-2} m \right) \cdot \left(8 \cdot 10^{-2} m + 3 \frac{m}{s} \cdot t \right)},$$

odnosno:

$$e(t) = \frac{47,88}{(0,365 + 3 \cdot t) \cdot (0,08 + 3 \cdot t)} [nV],$$

za vreme t u sekundama.

c) Ako se pravougaona kontura kreće translatorno, konstantnom brzinom $v_2 = 1[m/s]$ u smeru označenom na slici 3.9.1., u nekom trenutku t pravougaono kolo se nalazi u položaju prikazanom na slici 3.9.5. Magnetski fluks koji kroz pravougaonu konturu stvara samo struja prvog provodnika je $\Phi_1(t)$ a izračunava prema:

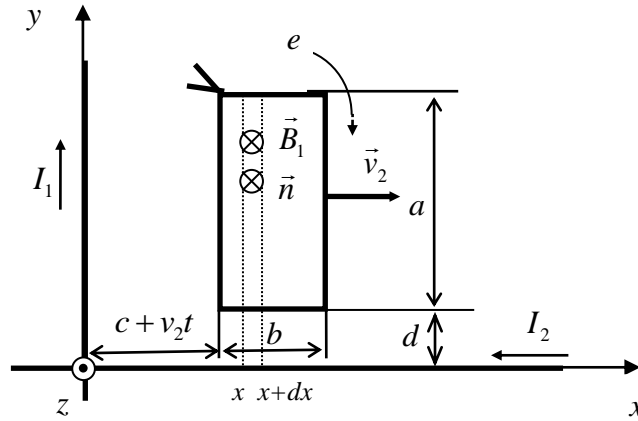
$$\Phi_1(t) = \int_S d\Phi_1(t) = \int_{c+v_2 t}^{c+v_2 t+b} \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{c + v_2 t + b}{c + v_2 t},$$

ako se fluks računa za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slici 3.9.5. Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\Phi_1(t) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \frac{5A \cdot 28,5cm}{2\pi} \ln \frac{12 \cdot 10^{-2}m + 1 \frac{m}{s} t + 14 \cdot 10^{-2}m}{12 \cdot 10^{-2}m + 1 \frac{m}{s} t},$$

gde je t vreme, odnosno za vreme t u sekundama:

$$\Phi_1(t) = 0,285 \cdot \ln \frac{t + 0,26}{t + 0,12} [\mu Wb].$$



Slika 3.9.5.

Kada se pravougaona kontura kreće translatorno, konstantnom brzinom $v_2 = 1[m/s]$ u smeru označenom na slici 3.9.5., onda se njen relativni položaj ne menja u odnosu na provodnik 2, pošto su provodnici sa strujama beskonačno dugački. Zato magnetski fluks $\Phi_2(t)$, koji kroz pravougaonu konturu stvara struja drugog provodnika, ima istu vrednost kao pod tačkom a) kada kontura miruje odnosno:

$$\Phi_2(t) = \int_s d\Phi_2(t) = \int_d^{d+a} \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \frac{dy}{y} = \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$\Phi_2(t) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \frac{2A \cdot 14cm}{2\pi} \ln \frac{8cm + 28,5cm}{8cm} = const \approx 0,085 [\mu Wb].$$

Ukupan magnetni fluks kroz pravougaono kolo u trenutku t , računat za referentni smer dat ortom normale \vec{n} kao na slici 3.9.5. je:

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) = \mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \ln \frac{b + c + v_2 \cdot t}{c + v_2 \cdot t} + \mu_0 \frac{I_2 \cdot b}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se:

$$\Phi(t) \approx \left(0,285 \cdot \ln \frac{t + 0,26}{t + 0,12} + 0,085 \right) [\mu Wb],$$

za vreme t u sekundama.

Smer ems prema pravilu desne zavojnice povezan je sa referentnim smerom za računanje fluksa $\Phi(t)$ (a to je smer orta normale \vec{n} kao na slici 3.9.5.) pa je, prema Faradejevom zakonu, indukovana elektromotorna sila jednaka:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt},$$

a to je:

$$e(t) = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -\mu_0 \frac{I_1 \cdot a}{2\pi} \frac{c + v_2 t}{c + v_2 t + b} \frac{v_2(c + v_2 t) - v_2(c + v_2 t + b)}{(c + v_2 t)^2},$$

odnosno:

$$e(t) = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot a \cdot b \cdot v_2}{2\pi(c + v_2 t + b) \cdot (c + v_2 t)}.$$

Kada se zamene brojne vrednosti, dobijamo:

$$e(t) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 5A \cdot 28,5 \cdot 10^{-2} m \cdot 14 \cdot 10^{-2} m \cdot 1 \frac{m}{s}}{2\pi \left(12 \cdot 10^{-2} m + 1 \frac{m}{s} \cdot t + 14 \cdot 10^{-2} m \right) \cdot \left(12 \cdot 10^{-2} m + 1 \frac{m}{s} \cdot t \right)},$$

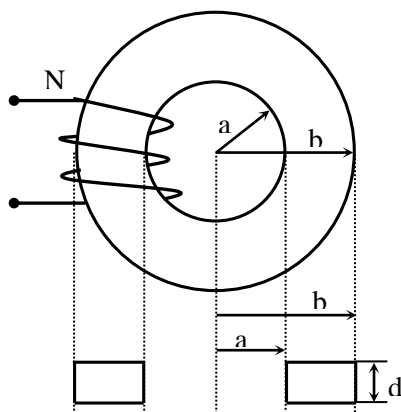
ili, za vreme t u sekundama indukovana ems je:

$$e(t) = \frac{39,9}{(0,26 + t) \cdot (0,12 + t)} [nV],$$

za referentni smer označen na slici 3.9.5.

3.10. Na torusu od neferomagnetnog materijala prikazanom na slici 3.10.1 ($\mu_r \approx 1$) ravnomerno i gusto namotano je N zavojsa žice u jednom sloju.

- Odrediti induktivnost namotaja .
- Odrediti približnu induktivnost namotaja, smatrajući da je magnetna indukcija u torusu homogena i jednaka magnetnoj indukciji na srednjoj liniji torusa.



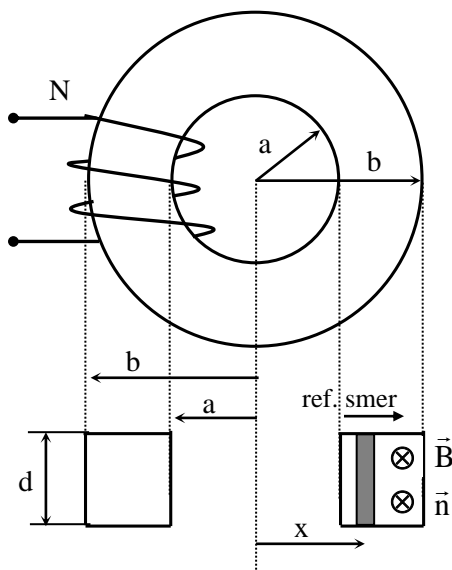
Slika 3.10.1

Rešenje:

Induktivnost električnog kola definiše se kao količnik sopstvenog fluksa i intenziteta struje u kolu:

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Referentni smerovi prikazani su na slici 3.10.2.



Slika 3.10.2

Zbog povezanosti referentnih smerova struje, magnetne indukcije i normale na osnovnu površinu, sopstveni fluks i intenzitet struje u kolu su istog znaka pa je induktivnost L uvek pozitivna veličina.

Kada se kroz namotaj od N navojaka uspostavi struja I , magnetna indukcija u torusu jednaka je, na osnovu Amperovog zakona,

$$B(x) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi x}, \quad a \leq x \leq b.$$

Magnetni fluks kroz namotaj je

$$\Phi = N \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_a^b B dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = N \int_a^b \mu_0 \frac{NI}{2\pi x} d \cdot dx = \mu_0 \frac{N^2 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Induktivnost namotaja je onda

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

b) Magnetna indukcija na srednjoj liniji torusa iznosi

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\pi(a+b)}$$

pa je, sledeći postupak primenjen pod a)

$$\Phi_{prib} = \mu_0 N^2 I d \frac{b-a}{\pi(a+b)}$$

i

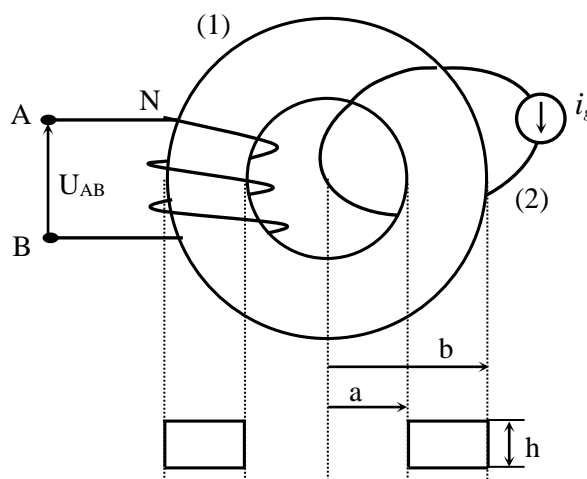
$$L_{prib} = \mu_0 \frac{N^2 d(b-a)}{\pi(a+b)}.$$

3.11. Na torusno jezgro sa slike 3.11.1, koje je načinjeno od materijala relativne magnetske permeabilnosti μ_r , ravnomerno i gusto je namotano N navojaka tanke, izolovane bakarne žice. Električna kontura (2) u kojoj deluje strujni generator $i_g = \sqrt{2} \cdot I_g \sin(2\pi f t)$ obuhvata torus. Izračunati:

- Sopstvenu induktivnost L_{11} namotaja (1).
- Međusobnu induktivnost L_{12} namotaja (1) i električne konture (2).
- Trenutne vrednosti napona praznog hoda U_{AB} na krajevima namotaja.

Numerički podaci: $I_g = 100[A]$, $f = 50[Hz]$, $N = 2500$, $a = 10[cm]$, $b = 12[cm]$, $h = 4[cm]$,

$\mu_r = 9.6$.



Slika 3.11.1

Rešenje:

- Sopstvena induktivnost torusnog namotaja dobija se koristeći rezultat zadatka 3.10.a

$$L_{11} = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 87.5 [mH].$$

- b) Struja $i_2 = i_g$ koja protiče kroz konturu (2) stvara magnetni fluks Φ_{21} u torusnom namotaju (1). Međusobna induktivnost električne konture (2) i torusnog namotaja (1) definiše se kao:

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_g}$$

Ako magnetska permeabilnost sredine ne zavisi od struje u konturama (1) i (2) važi

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1}.$$

Međusobna induktivnost može biti pozitivna ili negativna veličina, što zavisi od usvojenih referentnih smerova.

Za usvojene referentne smerove prikazane na slici 3.11.2 važi:

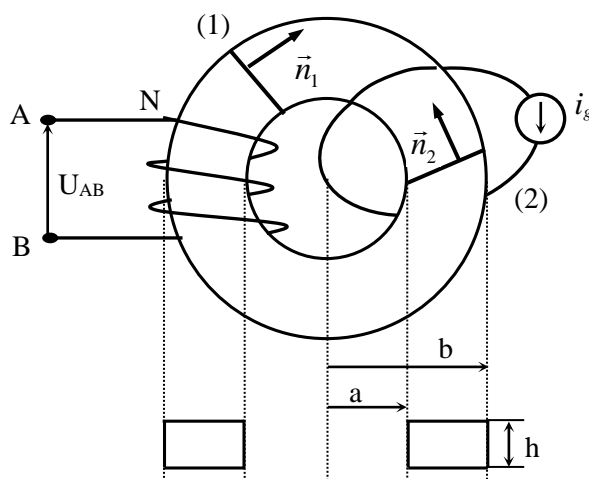
$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S},$$

gde je

$$B_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N i_1}{2\pi x}, \quad a \leq x \leq b$$

magnetno polje koje potiče od struje i_1 u konturi (1).

Magnetno polje B_1 torusnog namotaja (1) lokalizovano je u unutrašnjosti torusa, a izvan torusa je nula.



Slika 3.11.2

Magnetski fluks Φ_{12} koji stvara struja u konturi (1) kroz konturu (2) onda ne zavisi od oblika konture (2), jer fluks postoji samo kroz poprečni presek torusnog namotaja

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}.$$

Površina S_2 je zapravo površina poprečnog preseka torusnog namotaja.

$$\Phi_{12} = \mu_0 \mu_r \int_a^b \frac{Ni_1 h}{2\pi} \frac{dx}{x} \cos \pi = -\mu_0 \mu_r \frac{Ni_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Međusobna induktivnost je onda

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = -\mu_0 \mu_r \frac{Nh}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = -35[\mu\text{H}].$$

- c) S obzirom da se traži napon praznog hoda na krajevima torusnog namotaja struja u konturi (1) jednaka je nuli. Napon na krajevima namotaja (1) jednak je onda indukovanoj elektromotornoj sili koju kroz namotaj (1) stvara promenljivi fluks Φ_{21} , koji potiče od struje i_g u drugoj konturi.

$$U_{AB} = L_{21} \frac{di_g}{dt} = L_{21} \sqrt{2} I_g 2\pi f \cos(2\pi f t) = 1.1\sqrt{2} \cos(100\pi t) [V].$$